

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Guía de Matemáticas VII

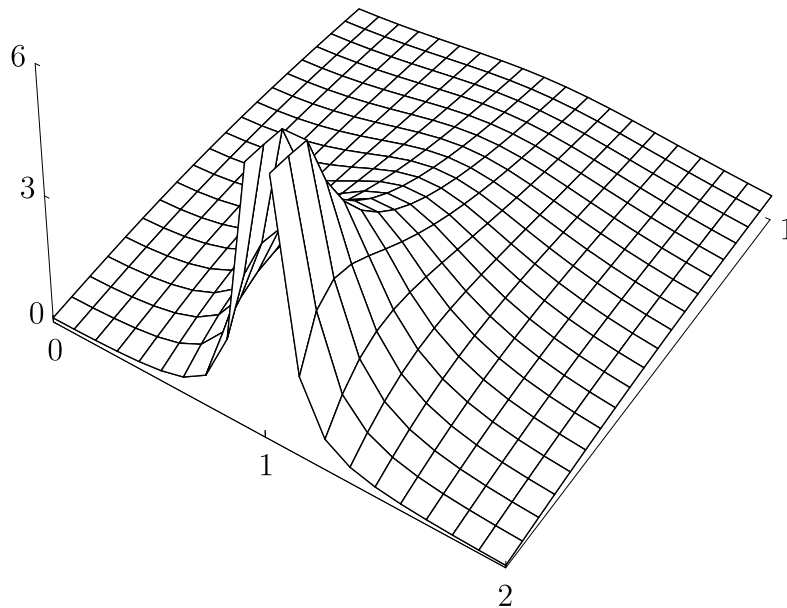


Figura 1

S. Andrea
A. Mendoza
3 de Septiembre de 2001

Prólogo

En el curso de Matemáticas VII se enseña cómo resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen en la física matemática. Esta guía pretende no sólo explicar las técnicas de cálculo sino también los aspectos teóricos involucrados para alcanzar dicho objetivo.

En muchos problemas de la física y de la ingeniería se quiere saber cómo un sistema reacciona cuando está bajo el efecto de fuerzas externas. En la resolución de una tarea así planteada, podemos ver tres etapas sucesivas

1. El enunciado de una ley general de la naturaleza que se aplica al sistema dado.
2. El recuento cuantitativo de las fuerzas externas que sacarán al sistema de su estado de equilibrio.
3. La presentación del estado del sistema, es decir, el análisis de los efectos producidos por las fuerzas externas.

En el modelo matemático paralelo al problema físico, se definen ciertas “funciones de estado” cuyos valores numéricos, en puntos del espacio y/o del tiempo, constituyen una descripción completa del sistema. Valores idénticamente nulos corresponden al estado de equilibrio.

Los tres pasos dados antes reaparecen ahora como:

1. La formulación de ecuaciones diferenciales, bien sea en derivadas ordinarias o parciales, entre cuyas soluciones han de encontrarse las funciones de estado.
2. La formulación matemática de las fuerzas externas. Aquí encontramos diversos conceptos como “valores iniciales”, “valores de frontera” y “término no-homogéneo forzante en una ecuación lineal”. Dado que

todos aparecen con el mismo propósito, es natural buscar un lenguaje que permita expresarlos a todos en forma unificada.

3. La determinación de una solución para la ecuación diferencial relevante al problema, una solución que incorpora los valores iniciales, los valores de frontera, etc, que fueron impuestos. De ser correcto el procedimiento esbozado, habrá una solución y sólo una.

Usualmente vemos ecuaciones diferenciales que ya fueron conocidas en siglos pasados. En cambio, es sólo recientemente que aparece un lenguaje adecuado para las condiciones externas.

Nos referimos a “las funciones generalizadas”, también conocidas como las “distribuciones de Schwartz”. El concepto central y fundamental es el de un impulso concentrado en un punto del espacio o del tiempo, es decir, la función delta de Dirac.

Como la delta y sus derivadas no se pueden tratar usando cálculo clásico, es necesario elaborar un esquema conceptual en donde haya consistencia entre los resultados que proceden de las dos teorías. Este es el propósito del capítulo 3.

Una consecuencia de esa teoría es que, en cierto sentido, se puede pensar en cualquier condición externa como si fuera una superposición continua de deltas de Dirac. La solución correspondiente puede compararse con la solución que proviene de una sola delta. En el capítulo 4 se explica cómo las soluciones se conectan por una integral de convolución, en el caso de una ecuación ordinaria con coeficientes constantes, y soluciones que se anulan en los tiempos negativos.

Ahora bien, todo lo anterior viene orientado hacia la determinación de las funciones de estado, enfatizando siempre sus valores numéricos en puntos del espacio y del tiempo. Pero hay una segunda categoría de preguntas: ¿Cuáles son las frecuencias más importantes en las funciones de estado, y con qué fase y amplitud están entrando?

La misma idea de “frecuencia” no es clara. Podría decirse por ejemplo que $u(t) = \cos \omega t$ tiene frecuencia $2\pi/\omega$ porque el intervalo $0 \leq t \leq 1$ contiene mas o menos esa cantidad de copias idénticas de la misma figura. Pero no es evidente como definir frecuencias para funciones mas generales.

En los capítulos 14, 15 y 16 sobre Transformada de Fourier se examina este asunto. Los conceptos de la teoría de las funciones generalizadas, permiten definir la transformada de Fourier para una muy amplia clase de funciones

$f(t)$. La transformada de Fourier especifica las amplitudes y las fases de frecuencias $\hat{f}(\omega)$ que determinan unívocamente a una de estas función $f(t)$. Más aún, ecuaciones diferenciales en el eje del tiempo $-\infty < t < \infty$ pueden convertirse en ecuaciones algebraicas en el eje de frecuencias, ayudando así en su solución.

Por cierto, este método ya aparece en los capítulos 4 y 5 con la Transformada de Laplace, la cual puede verse como un caso especial de la de Fourier.

En particular, el cumplimiento de una ecuación diferencial en el tiempo, así como una convolución entre dos funciones, pueden reflejarse en ecuaciones sencillas entre las respectivas Transformadas de Laplace.

Los capítulos 8, 9, 10 y 11 sobre Series de Fourier también versan sobre el mismo tema, tiempo - versus - frecuencia, pero en el contexto de las funciones periódicas $f(x + 2\pi) = f(x)$, cuyas posibles frecuencias son los múltiplos enteros de una sola frecuencia fundamental. Las amplitudes y las fases aparecen entonces en los coeficientes de la serie de Fourier de $f(x)$.

Cuando presentamos una función $f(x)$ como una Transformada o una serie de Fourier, la estamos reconstruyendo a partir del análisis de sus frecuencias intrínsecas, el resultado, a groso modo, es que $f(x)$ es una combinación lineal de algunas $e^{i\omega x}$.

Por otro lado, un primer paso en el estudio de una ecuación en derivadas parciales, puede ser la búsqueda de soluciones particulares por medio del método de la separación de variables (capítulo 6.11). Las funciones $e^{i\omega x}$ aparecen a menudo, otras funciones que surgen son las funciones de Bessel (capítulo 13) y los Armónicos Esféricos (capítulo 17).

En fin, el segundo de los tres pasos dados al comienzo habla de las condiciones externas. Cuando podemos resolver la ecuación con una delta colocada en cualquier punto, podemos superponer estas soluciones particulares en una integral parecida a la convolución, para llegar a la solución general. Este método se conoce como el de la “función de Green”.

Un segundo camino, sin embargo, es desarrollar las condiciones externas, que figuran como valores de frontera para las soluciones particulares halladas por separación de variables, en series de funciones especiales. Aquí aparecen las series e integrales de Fourier, así como las series de autofunciones que provienen de un problema de frontera del tipo Sturm - Liouville. El capítulo 12 trata este tema.

Queremos agradecer la colaboración en la edición de esta guía al profesor Peter Hummelgens y en especial al profesor Luis Mata.

Índice General

Prólogo	i
1 Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales	3
1.1 Espacios Vectoriales	3
1.1.1 Dependencia e Independencia Lineal de Vectores	4
1.2 Transformaciones Lineales	5
1.2.1 Funcionales Lineales	6
2 Integrales Impropias	7
2.1 Integrales Impropias. Definición y ejemplos	7
2.2 Sobre la convergencia de las integrales impropias	9
2.3 El espacio de funciones absolutamente integrables	13
2.4 Funciones suaves a trozos	15
2.5 Resultados generales sobre integración	16
3 Funciones Generalizadas y sus Derivadas	21
3.1 Sucesiones de funciones que tienden a la delta de Dirac	22
3.2 Derivadas generalizadas de funciones suaves a trozos	25
3.3 Funciones generalizadas: funcionales lineales	31
3.3.1 Sumas de funciones generalizadas y sus productos por funciones C^∞	33
3.3.2 Derivadas generalizadas	33
3.3.3 Límites de funciones generalizadas	35
4 Convolución	41
4.1 Convolución	44
4.1.1 Convolución de funciones generalizadas	47
4.1.2 Derivada generalizada de la convolución	49

4.2	Ecuaciones diferenciales: ejemplos	50
4.3	Ecuaciones diferenciales: caso general	52
4.4	Propagadores Causales	56
5	La Transformada de Laplace	61
5.1	Transformada de Laplace: Definición	61
5.2	Transformadas de Laplace de funciones generalizadas	63
5.3	Propiedades de la Transformada de Laplace	64
5.4	Aplicaciones de la Transformada de Laplace	68
6	Transformada Inversa de Laplace	73
6.1	Fracciones simples	73
6.2	Método de los residuos	75
6.3	Transformada Inversa de Laplace	78
7	Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales	87
7.1	Ecuaciones en derivadas parciales	87
7.2	EDP con condiciones de frontera bien planteado	91
7.3	Separación de variables	92
7.3.1	Separación de variables para el operador de calor	93
8	Series de Fourier	99
8.1	Funciones trigonométricas	99
8.2	Coefficientes de Fourier	101
9	Teoría L^2 de las Series de Fourier	109
9.1	La norma L^2	109
9.2	Series de Fourier	113
10	Convergencia Puntual de Series de Fourier	121
10.1	Teoremas de Convergencia Puntual	121
11	Aplicaciones de las Series de Fourier	131
11.1	Series de Fourier Seno	132
11.2	Series de Fourier Coseno	134
11.3	Cuerda vibrante	135
11.4	Conducción de calor en una barra aislada	136
11.5	Problema de Dirichlet sobre el disco unitario	137

12 Sturm-Liouville	141
12.1 Operador de Laplace para funciones radiales	141
12.2 La ecuación de calor	142
12.3 Problema de Sturm-Liouville	146
12.4 Laplaciano en coordenadas polares	148
12.5 Ecuación de Bessel	149
13 Funciones de Bessel	153
13.1 Construcción de las funciones de Bessel	153
13.2 Propiedades de las funciones de Bessel	156
13.3 Integración de las funciones de Bessel	159
14 Transformada de Fourier	169
14.1 Teoremas operacionales	174
14.2 Transformada de Fourier Inversa	175
14.3 El espacio de las funciones de Schwartz	178
15 Transformadas de Fourier de Distribuciones	183
15.1 Teoremas Operacionales	188
16 Aplicaciones de la Transformada de Fourier	193
16.1 Transformada seno	194
16.2 Transformada coseno	195
17 Armónicos Esféricos en \mathbb{R}^3	207
17.1 Ejemplos de funciones armónicas	207
17.2 Polinomios de Legendre	209
17.3 El espacio de Armónicos Esféricos	212
17.4 Funciones de Legendre Asociadas	213
17.5 Relaciones de Ortogonalidad	215
17.6 Expansión en Armónicos Esféricos	219
17.7 Problema de Dirichlet	220

Capítulo 1

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

La intención de este capítulo es principalmente la de refrescar los conocimientos del lector acerca de espacios vectoriales y transformaciones lineales. La importancia de estos temas radica en que muchas de las ecuaciones diferenciales de la física y de la ingeniería se pueden ver en términos de transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Esto permite ver lo parecidas que son entre si ecuaciones que provienen de problemas físicos muy distintos.

1.1 Espacios Vectoriales.

Comenzamos recordando lo siguiente: Se dice que un conjunto V , es un espacio vectorial si:

1. Siempre que u y v estan en V entonces, para cualquier par de constantes a y b la suma $au + bv$ también está en V .
2. Existe un elemento c (usualmente denotado con 0) en V tal que para cualquier u en V se tiene $u + c = u$. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.

Ejemplo 1 Sea X un conjunto. Considere el conjunto $V(X)$ que contine a todas las funciones complejas definidas en X . Si f y g son dos funciones en $V(X)$ y a es una número complejo entonces la suma definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in X \quad (1.1)$$

define otra función en $V(X)$ y el producto

$$(af)(x) = af(x) \quad (1.2)$$

también. Con estas dos operaciones, es claro que $V(X)$ es un espacio vectorial. En particular, la función que sirve como elemento neutro para la suma es la función $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ que a todo x en X le asigna el valor cero. En efecto, para todo x en X

$$(c + g)(x) = c(x) + g(x) = 0 + g(x) = g(x).$$

de manera que $c + g = g$. (igualdad entre funciones). Como es usual, a la función c la denotaremos con el número 0.

Del ejemplo anterior se desprende que si I es un intervalo de la recta real¹ entonces $V(I)$, el conjunto de funciones definidas sobre I es un espacio vectorial. Igualmente, si U es un subconjunto de \mathbb{R}^n entonces $V(U)$, el conjunto de funciones definidas sobre U es un espacio vectorial.

Subconjuntos de $V(I)$ ($V(U)$) que también son espacios vectoriales (y de mayor interés para nosotros) son, por ejemplo: el conjunto $C(I)$ ($C(U)$) de funciones continuas definidas en I (en U) y el conjunto $C^\infty(I)$ ($C^\infty(U)$) de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre I (sobre U).

1.1.1 Dependencia e Independencia Lineal de Vectores

Recordemos lo siguiente. Sea V un espacio vectorial (V puede ser \mathbb{R}^n pero es mejor habituarse a pensar que V es algún espacio vectorial de funciones complejas definidas en algún intervalo I). Se dice que el conjunto de vectores w_i con $i = 1, \dots, n$ es linealmente dependiente si existen constantes, no todas iguales a cero, tales que

$$\sum_{k=1}^n a_k w_k = 0.$$

En caso contrario, diremos que los vectores son linealmente independientes.

También tenemos el siguiente

Teorema 1.1 *Un conjunto de n vectores es linealmente independiente si y sólo si, la única solución al problema*

$$\sum_{k=1}^n a_k w_k = 0.$$

¹Aquí I puede coincidir con la recta real

es $a_i = 0$ con $i = 1, \dots, n$

Ejemplo 2 En \mathbb{R}^3 los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, son linealmente independientes. En efecto, el problema $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (a, b, c) = (0, 0, 0)$ tiene por única solución $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

Ejemplo 3 Sea I un intervalo de la recta real y $C(I)$ el conjunto de las funciones a valores complejos continuas definidas sobre I . Las funciones $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 5x + 7x^2$ son linealmente dependientes. Esto es así por que problema $af(x) + bg(x) + eh(x) = 0$ tiene (entre otras) la solución $a = 5/3$, $b = 7/2$ y $e = -1$ (obsérvese que la ecuación debe satisfacerse en cada x del intervalo I).

Sin embargo, las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son linealmente independientes. En efecto, no existen constantes (reales o complejas) a y b tales que $af(x) + bg(x) = 0$. Para ver que esto es así basta recordar el Teorema Fundamental del Álgebra² que nos dice que un polinomio de grado n (en nuestro caso $n = 2$) se anula a lo más en n puntos. De manera que si $a \neq 0$ $af(x) + bg(x) = ax^2 + bx$ es un polinomio de segundo grado que a lo sumo se anula en dos puntos. Si hacemos $a = 0$ y $b \neq 0$ obtenemos la función lineal bx que sólo se anula en $x = 0$. De modo que la única solución para la ecuación $af + bg = 0$ es $a = b = 0$.

1.2 Transformaciones Lineales

Definición 1.1 Sean V y W dos espacios vectoriales. Diremos que el mapa $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si para todo par de vectores u y v en V y números a y b , ocurre que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$

Ejemplo 4 Sea I un intervalo abierto. Hemos dicho que el conjunto $C^\infty(I)$ de funciones infinitamente diferenciables sobre I es un espacio vectorial. El operador D que manda una función f en $D(f) := f'$ (f' es la derivada de f) es una transformación lineal de $C^\infty(I)$ en si mismo. En efecto, si f y $g \in C^\infty$ y a y $b \in \mathbb{C}$, entonces

$$D(af + bg) = (af + bg)' = af' + bg' = aD(f) + bD(g).$$

Más adelante veremos que la transformada de Laplace y la Transformada de Fourier son transformaciones lineales.

²Véase, por ejemplo *Elementos de Variable Compleja* del Prof. A. Etcheberry.

1.2.1 Funcionales Lineales

Sea V un espacio vectorial. Cuando uno tiene un mapa K de V en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}), se dice que el mapa K es un funcional. En particular, si el mapa K cumple con

$$K(av + bw) = aK(v) + bK(w),$$

donde v y $w \in V$ y a y $b \in F$, entonces se dice que el funcional K es un *funcional lineal*.

Ejemplo 5 Consideremos a \mathbb{R}^3 como espacio vectorial. Sea u un vector fijo en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$K(v) := u \cdot v,$$

(el producto interno de u por v) define un mapa de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . Este funcional es lineal: para v y $w \in \mathbb{R}^3$ y a y $b \in \mathbb{R}$, tenemos

$$K(av + bw) = u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w = aK(v) + bK(w).$$

Ejemplo 6 Sea $I = [a, b]$ un intervalo de la recta real y $C(I)$ el conjunto de funciones cuya integral sobre I existe. Este conjunto es un espacio vectorial. El mapa $\mathcal{I} : C(I) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx$ es un funcional lineal. En este ejemplo, \mathcal{I} toma una función f y nos devuelve el número (real o complejo) que sale de tomar la integral entre a y b de la función f .

Ejemplo 7 Sea I un intervalo en \mathbb{R} y $C(I)$ el espacio de funciones continuas sobre I . Sean $c \in I$ y $K : C(I) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$K(f) = f(c).$$

El valor del funcional K sobre una función $f \in C(I)$ es $f(c)$. K es un funcional lineal: si a y $b \in \mathbb{C}$ y $g \in C(I)$, entonces

$$K(af + bg) = (af + bg)(c) = af(c) + bg(c) = aK(f) + bK(g).$$

A este funcional lo llamaremos (véase el capítulo 3) la delta de Dirac concentrada en c

Capítulo 2

Integrales Impropias

En cursos anteriores, hemos estudiado integrales de funciones continuas sobre intervalos acotados (esto es $\int_a^b f(x) dx$). Los valores de estas integrales se definen en términos de límites de sumas de Riemann y éstas se pueden calcular con ayuda del teorema fundamental del cálculo.

Para poder estudiar las transformadas de Laplace y de Fourier, es necesario entender el significado de integrales tales como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ en donde la integración se realiza sobre intervalos no acotados. Estas integrales reciben el nombre de *integrales impropias*.

2.1 Integrales Impropias. Definición y ejemplos

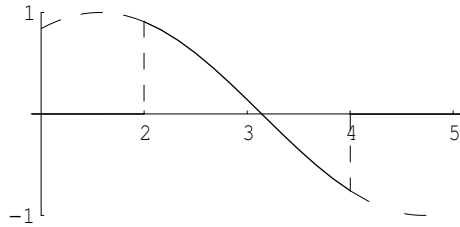
Definición 2.1 Supongamos que la función $f(x)$ está definida en toda la recta real. La integral impropia de f sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$ se define por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx + \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^0 f(x) dx$$

suponiendo que ambos límites existen por separado. En este caso, diremos que la integral converge. Si alguno de estos dos límites no existe, entonces la integral impropia no existe y diremos que la integral no converge.

Ejemplo 1 A veces la integración sobre un intervalo infinito es simplemente una formalidad conveniente en la notación. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow$

\mathbb{R} definida así



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2; \\ \sin(x) & \text{si } 2 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

Figura 2.1

Entonces la $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ se reduce a $\int_2^4 \sin(x) dx$. Por esta misma razón, una integral impropia $\int_a^{\infty} g(x) dx$ la podemos escribir como $\int_{-\infty}^{\infty} H(x-a)g(x) dx$ donde $H(x)$ es la función de Heaviside dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2 Calcular la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Usando la definición 2.1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^R = 1 - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 1.$$

Ejemplo 3 La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$ no existe. En efecto, si bien es cierto que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx$ existe (vale 1) sucede, sin embargo que $\lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^0 e^{-x} dx = \lim_{S \rightarrow \infty} e^S - 1$ no existe y por tanto la integral impropia tampoco existe.

El siguiente ejemplo tiene especial interés en el cálculo de transformadas de Laplace.

Ejemplo 4 La integral $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ sólo existe si el número complejo $z = \sigma + i\omega$ tiene parte real positiva, es decir, si $\sigma > 0$. En este caso, la integral vale $1/z$. En efecto,

$$\int_0^R e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_0^R = \frac{1}{z} (1 - e^{-zR})$$

pero $\lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-zR}| = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R\sigma} = 0$, de forma tal que

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$$

Ejemplo 5 La integral $\int_1^{\infty} dx/x^{1+\alpha}$ existe sólo si $\alpha > 0$ y en este caso su valor es $1/\alpha$. En efecto, si $\alpha = 0$, entonces $\int_1^R dx/x = \ln(R)$ y como el $\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R)$ no existe, entonces la $\int_1^{\infty} dx/x$ no existe. Si $\alpha > 0$, entonces

$$\int_1^R \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = -\frac{1}{\alpha x^{\alpha}} \Big|_1^R = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{R^{\alpha}}\right);$$

como $\alpha > 0$, entonces $\lim_{R \rightarrow \infty} 1/R^{\alpha} = 0$. Así

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha}.$$

El caso $\alpha < 0$ se deja como ejercicio.

2.2 Sobre la convergencia de las integrales impropias

Para decidir si una integral impropia existe, casi nunca es necesario evaluar explícitamente la integral. Para verificar si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe, se puede aplicar el siguiente criterio. Supongamos que conocemos una función $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $g(x) \geq 0$ para todo x en \mathbb{R} ,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ existe y
3. $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x en \mathbb{R} .

Entonces la $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe. Para ver que esto es cierto hay que mostrar por separado que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx$ converge y que $\lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^0 f(x)dx$ converge. Vamos a probar la convergencia de la primera integral puesto que la otra se hace de manera similar.

Como $\int_0^\infty g(x)dx$ converge, existe una constante $0 < M < \infty$ tal que

$$M = \int_0^\infty g(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R g(x)dx.$$

Esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $T > 0$ tal que si $R \geq T$ entonces,

$$\left| \int_0^R g(x)dx - M \right| < \epsilon/2.$$

Si $T < S < R$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_S^R g(x)dx \right| &= \left| \int_0^R g(x)dx - \int_0^S g(x)dx \right| \\ &= \left| \int_0^R g(x)dx - M - \left(\int_0^S g(x)dx - M \right) \right| \\ &\leq \left| \int_0^R g(x)dx - M \right| + \left| \int_0^S g(x)dx - M \right| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo ϵ se sigue que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ S \rightarrow \infty}} \int_S^R g(x)dx = 0.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R f(x)dx - \int_0^S f(x)dx \right| &= \\ \left| \int_S^R f(x)dx \right| &\leq \int_S^R |f(x)| dx \leq \int_S^R g(x) dx. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ S \rightarrow \infty}} \left| \int_0^R f(x)dx - \int_0^S f(x)dx \right| = 0. \quad (2.1)$$

Finalmente, consideremos la siguiente sucesión de números

$$a_n = \int_0^n f(x) dx; \quad n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La ecuación 2.1 nos dice que $\{a_n\}$ es una secuencia de Cauchy de números y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

existe. Este criterio de convergencia lo podemos enunciar entonces bajo el siguiente

Teorema 2.1 Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, tales que para todo x en \mathbb{R} se tiene $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$. Si $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge.

Otro criterio útil para decidir la convergencia de una integral impropia está dado por el siguiente

Teorema 2.2 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, esto es $g(x) \geq 0$ para todo x en \mathbb{R} . Si para todo S y R , las integrales $\int_S^R g(x) dx \leq M$, para algún $M > 0$, entonces, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ existe.

En efecto, consideremos la sucesión de números dada por

$$a_n = \int_{-n}^n g(x) dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta es una secuencia no decreciente, acotada por M . La secuencia converge cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto la integral existe.

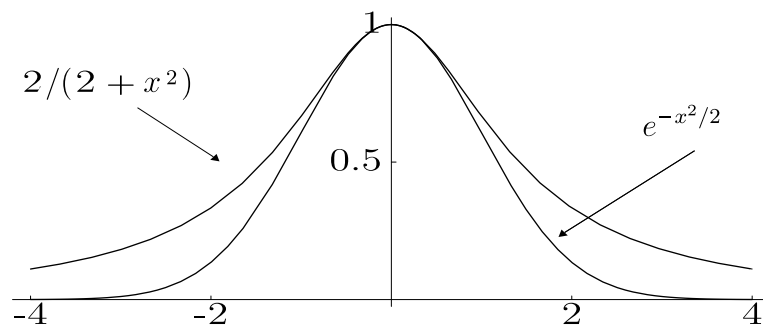


Figura 2.2: $e^{-x^2/2}$ y $2/x^2$

Ejemplo 6 Veamos que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ existe. Como la función $e^{-x^2/2}$ es par basta analizar lo que ocurre en el eje positivo de las x . Observemos que

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Luego $e^{-x^2/2} \leq 2/(2+x^2)$ (ver figura 2.2). Si $R > 0$, entonces

$$\int_0^R e^{-x^2/2} dx \leq \int_0^R \frac{2}{2+x^2} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{2}{2+x^2} dx = \pi/\sqrt{2} \text{ para todo } R > 0.$$

De manera que tomando $M = \pi/\sqrt{2}$ el teorema 2.2 nos asegura que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ existe (su valor es $\sqrt{2}\pi$, véase la sección de ejercicios).

El siguiente ejemplo pone en evidencia la necesidad de pedir que la función f , en el teorema 2.2 sea no negativa.

Ejemplo 7 La función $\text{sen}(x)$ no cumple con $f(x) \geq 0$ para todo x en \mathbb{R} . La $\int_0^{\infty} \text{sen}(x) dx$ no existe porque para todo número real R , $\int_0^R \text{sen}(x) dx = 1 - \cos(R) \leq 2$ y la misma oscila entre 0 y 2 a medida que R tiende a infinito.

Ejemplo 8

$$\int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} \text{sen}(x) dx = \frac{1}{1 + \epsilon^2}, \quad \text{si } \epsilon > 0.$$

Usando la identidad de Euler $\text{sen}(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, esta integral se reduce al cálculo de la suma de dos integrales de la forma $\int_0^{\infty} e^{-zt} dx$ con $\text{Re}(z) > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} \text{sen}(x) dx &= \\ \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon-i)x} dx - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon+i)x} dx &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\epsilon-i} - \frac{1}{\epsilon+i} \right) = \frac{1}{1 + \epsilon^2}. \end{aligned}$$

Antes de concluir con este ejemplo, queremos hacer la siguiente observación. Sucede que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} \text{sen}(x) dx = 1$$

mientras que

$$\int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon x} \operatorname{sen}(x) dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x) dx$$

no existe. Este es un ejemplo en donde intercambiar el límite con la integración no es válida, es decir $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} \operatorname{sen}(x) dx \neq \int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon x} \operatorname{sen}(x) dx$.

2.3 El espacio de funciones absolutamente integrables

Del conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existe, hay un subconjunto que aparece con mucha frecuencia: el conjunto de las funciones que son absolutamente integrables.

Definición 2.2 Diremos que la función f es *absolutamente integrable* en \mathbb{R} si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f(x)\bar{f}(x)} dx < \infty. \quad (2.2)$$

Es claro que si f es absolutamente integrable sobre \mathbb{R} , entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge. Para ver que esto es así podemos usar el criterio de convergencia de integrales impropias (teorema 2.1). Aquí, $g(x) = |f(x)|$ y la integral de g sobre la recta real converge. Como $|f(x)| \leq g(x)$ (en este caso $|f(x)|$ es igual a $g(x)$) se sigue que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge.

Hemos visto en la sección 1.1 que las funciones definidas sobre la recta real a valores complejos forman un espacio vectorial. Nos preguntamos si el conjunto de las funciones absolutamente integrables forman también un espacio vectorial. Podría ocurrir que si f y g son dos funciones absolutamente integrables la suma $f + g$ no lo fuera. El teorema que sigue nos muestra que esto no ocurre.

Teorema 2.3 *El conjunto de todas las funciones absolutamente integrables sobre \mathbb{R} forman un espacio vectorial.*

Para ver que esto es así, tenemos que ver que la combinación lineal de cualquier par de funciones absolutamente integrables sobre \mathbb{R} también es absolutamente integrable sobre \mathbb{R} . Sean f y g dos funciones absolutamente

integrables sobre \mathbb{R} y sean a y b dos números complejos. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |a f(x) + b g(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |a f(x)| + |b g(x)| dx \\ &= |a| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + |b| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Para pasar de la primera línea a la segunda, usamos la desigualdad triangular en los números complejos. De la segunda a la tercera, la linealidad de los integrales. Como este argumento es válido para cualquier par de constantes a y $b \in \mathbb{C}$ vemos que cualquier combinación lineal de f y de g es absolutamente integrable. Y como esto vale para cualquier par de funciones f y g absolutamente integrables hemos demostrado que la combinación lineal de cualquier par de funciones absolutamente integrables es integrable.

Por ser esto así, damos la siguiente

Definición 2.3 Al conjunto de todas las funciones que cumplen con 2.2 lo denotaremos con $L^1(\mathbb{R})$ o simplemente L^1 y lo llamaremos el espacio de las funciones absolutamente integrables.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 9 La función $1/(1+x^2)$ pertenece a L^1 . En efecto, como f es no negativa entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(1+x^2)} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2) dx = \pi$$

(Véase el ejercicio 3). La función $g(x) = \cos(x)/(1+x^2)$ también está en L^1 . En efecto, como $|\cos(x)/(1+x^2)| \leq 1/(1+x^2)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Así, la integral de $|g(x)|$ converge y $g(x) \in L^1$.

Este ejemplo es un caso particular del siguiente

Teorema 2.4 Si la función $g \in L^1$ y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada, esto es, existe un número real M tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| < M$, entonces la función fg también está en L^1 .

En efecto, $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|g(x)|$. Como $\int_{-\infty}^{\infty} Mg(x) dx$ converge, el teorema 2.1 nos dice que también converge $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)| dx$ y el producto de f por g está en L^1 .

2.4 Funciones suaves a trozos

Como se mencionó al principio del capítulo, la integral de cualquier función puede escribirse como una integral impropia si uno tiene el cuidado de redefinir la función anulándola fuera del intervalo de integración original. Este procedimiento, en general, produce funciones que son discontinuas. Para estudiar esta situación vamos a introducir la siguiente

Definición 2.4 Una función es suave a trozos si existen números $\dots < a_k < a_{k+1} < \dots$ (puede haber un número finito o infinito de estos números) tal que $f(x)$ es C^∞ en cada intervalo (a_k, a_{k+1}) y, para cada punto de corte a_k existen los dos límites laterales $f(a_k^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a_k + \epsilon)$ y $f(a_k^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a_k - \epsilon)$, tanto para f como para cada una de sus derivadas.

Ejemplo 10 La función $\sin(x)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$ pero $|\sin(x)|$ es suave a trozos. Aquí $a_k = k\pi$ son los puntos de corte.

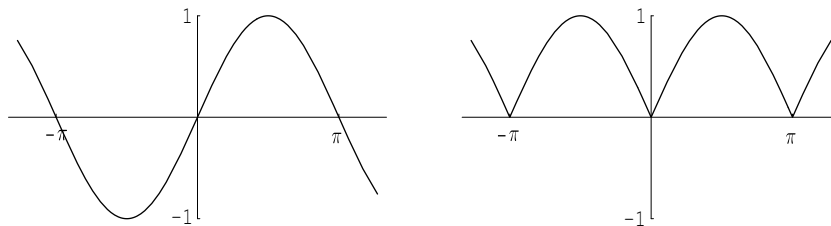
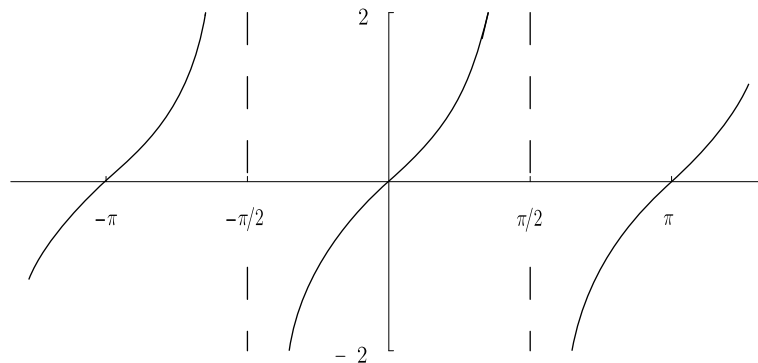
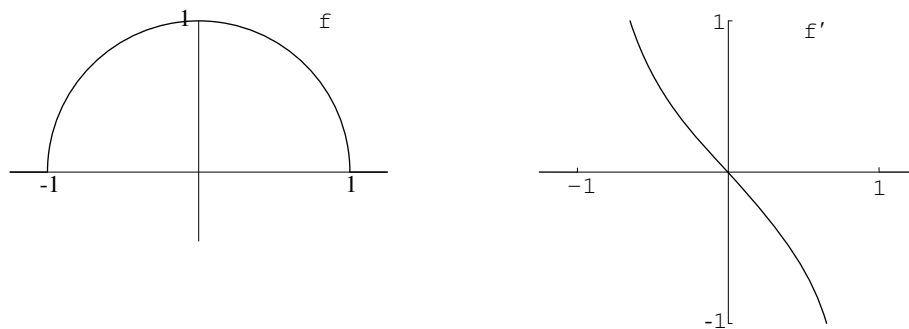


Figura 2.3: $\sin(x)$ y $|\sin(x)|$

La función $\tan(x)$ no es suave a trozos porque a pesar de ser C^∞ en los intervalos $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ los límites laterales de $f(x)$ no existen.

Figura 2.4: $\tan(x)$

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ si $|x| \leq 1$ y $f(x) = 0$ si $|x| > 1$, no es suave a trozos porque el límite lateral de su primera derivada, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ no existe.

Figura 2.5: $\sqrt{1-x^2}$ y su derivada

2.5 Resultados generales sobre integración

La teoría de integración puede extenderse de las funciones suaves a trozos a una clase más general de funciones llamadas *funciones medibles de Lebesgue*. Hablar en este curso sobre la teoría de la medida de Lebesgue nos llevaría muy lejos del tema que queremos desarrollar, ecuaciones diferenciales. Por esta razón, el tema de la medida de Lebesgue no lo vamos a estudiar. Sin embargo, la teoría de las transformadas de Laplace y de Fourier requieren, para su desarrollo, ciertas manipulaciones con las integrales impropias que sólo pueden ser justificadas usando medida de Lebesgue. Los hechos que usaremos los enunciaremos a continuación:

Teorema 2.5 (Fubini) Dada $f(x, y)$ una función tal que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy \right) dx < \infty$$

entonces

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx \right) dy < \infty;$
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ existe casi por doquier como función de y
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ existe casi por doquier como función de x ;

y

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Teorema 2.6 (Convergencia dominada) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones. Supongamos que para todo x , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$. Supongamos que existe una función $\phi(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ con ϕ no negativa, tal que para todo n y para todo x sucede que $|f_n(x)| \leq \phi(x)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

El teorema de Fubini justifica la operación de intercambiar el orden de integración en una integral múltiple impropia y el teorema de convergencia dominada justifica la operación de intercambiar el límite con la integral. La prueba de estos teoremas requiere en general de la teoría de la medida de Lebesgue. Sin embargo, en algunas circunstancias particulares, se pueden probar algunos de estos resultados usando integrales de Riemann.

Una de las sutilezas en el teorema de convergencia dominada puede verse en el siguiente

Ejemplo 11 Consideremos la sucesión $\{f_n(x)\}$ definida así

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq x \leq n+1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si bien $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, en cada $x \in \mathbb{R}$, no existe ninguna función ϕ en $L^1(-\infty, \infty)$ tal que, para todo n y todo x , $f_n(x) \leq \phi(x)$. En este caso en particular, ocurre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = 1$$

mostrando que el intercambio del límite con la integral no es válido en general.

RESUMEN

Este capítulo comenzó con la definición de lo que son las integrales impropias. A continuación se dieron varios criterios que permiten decidir si una integral impropia converge o no. Se definió el espacio de funciones absolutamente integrables y se demostró que es un espacio vectorial. Se definió el espacio de las funciones suaves a trozos. Al final del capítulo se mencionaron dos teoremas cuya importancia es crucial para lo que se dirá más adelante en este libro: El primero (Fubini) establece bajo cuáles circunstancias una integral doble indefinida se puede escribir como integrales iteradas. El segundo (convergencia dominada) establece bajo qué circunstancias puede uno intercambiar el orden en que se toman límites e integrales.

Ejercicios

1. No existe ningún $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^{\infty} t^{\alpha} dt < \infty$. Demuestre este hecho, considerando $\int_0^1 t^{\alpha} dt$ y $\int_1^{\infty} t^{\alpha} dt$ por separado.
2. Halle todos los exponentes $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (1 + x^2 + y^2)^{\beta/2} dx dy < \infty$$

3. Calcule la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.
4. Observamos que $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ tiene la forma $\int_0^{\infty} f(x)g(x) dx$, donde $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ y $\max_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| = 1$, mientras que $g'(x) < 0$ en $x > 0$.

- (a) Use integración por partes para demostrar que $\left| \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A}$ si $0 < A < B$.
- (b) ¿Por qué existe $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$?
5. Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = 1$.
6. Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Sugerencia: Designe con A el valor de la integral. Observe que A se puede escribir $A = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2} dy$. Calcule A^2 y pase a coordenadas polares para resolver la integral doble.
7. Considere la función $u(x, y) = (x^2 - xy)e^{-(x-y)^2}$.
- (a) Muestre que para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto u(x, y)$ está en $L^1(\mathbb{R})$. Muestre que $\int_{-\infty}^\infty u(x, y) dy = 0$.
- (b) Muestre que para cada $y \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto u(x, y)$ está en $L^1(\mathbb{R})$. Muestre que $\int_{-\infty}^\infty u(x, y) dx = \sqrt{\pi}/2$.
- (c) Este ejercicio parece contradecir el teorema de Fubini. Diga por qué el teorema de Fubini no es válido en este caso.
- Sugerencias: Para las partes (a) y (b) observe que $d/dt(e^{-t^2}) = -2te^{-t^2}$. Para la parte (c) analice la función $|u(x, y)|$

Capítulo 3

Funciones Generalizadas y sus Derivadas

La función delta de Dirac $\delta(x - c)$ aparece en cursos de física y de ingeniería como un “impulso concentrado en $x = c$ ”. La definición informal que aparece en algunos textos es la siguiente:

$$\delta(x - c) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq c \\ \infty & \text{si } x = c \end{cases} \quad (3.1)$$

con la propiedad de que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) dx = 1$. Ahora bien, esto es inconsistente con la teoría de integración. Si una función se anula en todo \mathbb{R} a excepción de un punto, su integral vale cero. Bajo la definición 3.1 también tendríamos que $5\delta(x - c) = \delta(x - c)$ lo cual no es verdad porque un impulso de cinco unidades no es igual a un impulso de una unidad. En realidad, la delta de Dirac no es una función de una variable real x sino una función generalizada. En la resolución de problemas concretos de física e ingeniería, la delta de Dirac aparece en expresiones como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) \phi(x) dx = \phi(c). \quad (3.2)$$

Queremos dar una interpretación más formal a esta expresión. El punto de vista que vamos a adoptar es que la integral 3.2 es simplemente una notación para expresar el hecho que la delta de Dirac *opera* o *actúa* sobre la función $\phi(x)$ y el resultado de esta operación es el valor de la función ϕ en el punto c . A través del símbolo de integración, la función generalizada $\delta(x - c)$ asocia

a cada función $\phi(x)$, continua en algún intervalo que contiene a c , el valor numérico $\phi(c)$. Lo que debemos tener presente es que $\delta(x - c)$ no se puede evaluar en puntos $x \in \mathbb{R}$ sino en funciones $\phi(x)$.

3.1 Sucesiones de funciones que tienden a la delta de Dirac

A pesar de que no tiene sentido evaluar la función delta sobre puntos de la recta real vamos a dar unos ejemplos que reconcilian parcialmente lo que intuitivamente entendemos con esta función.

Ejemplo 1 Consideremos la sucesión de funciones $\{D_n\}$ $n = 1, 2, \dots$ definida así

$$D_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c - \frac{1}{n}; \\ n/2 & \text{si } c - \frac{1}{n} < x < c + \frac{1}{n}; \\ 0 & \text{si } x > c + \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (3.3)$$

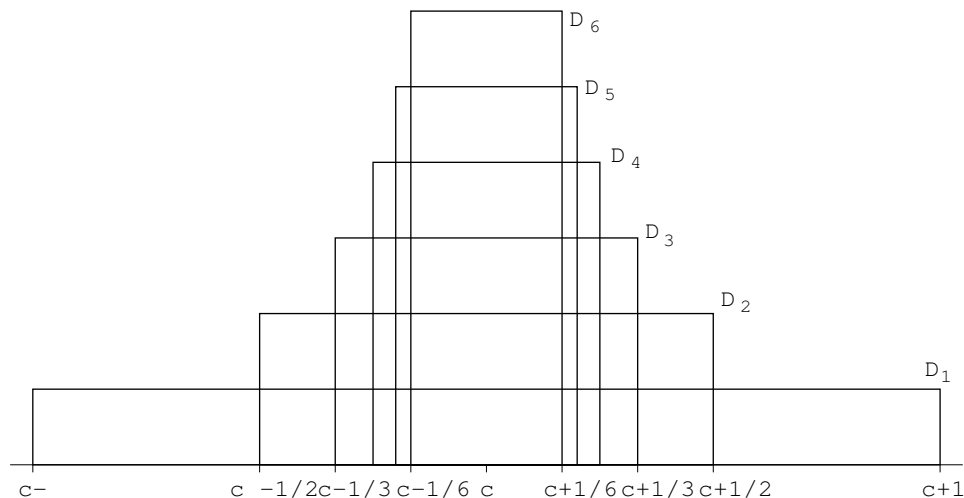


Figura 3.1

Sea I un intervalo abierto que contiene al punto c y sea $\phi(x)$ una función que pertenece a $C(I)$, el espacio de funciones continuas sobre I ¹. Existe un entero en M tal que si $n \geq M$ el conjunto de puntos donde la función $D_n(x)$

¹Véase la sección 1.1 en particular, la página 4

no se anula está contenido en I y la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x)dx = \frac{n}{2} \int_{c-1/n}^{c+1/n} \phi(x)dx \quad (3.4)$$

tiene sentido. Diremos que, a través de la integral 3.4, la función D_n opera sobre ϕ arrojando un número, el número que se obtiene de evaluar la integral.

Definición 3.1 Sea I un intervalo abierto de la recta real y $C(I)$ el espacio de funciones continuas sobre I . Diremos que una secuencia de funciones D_n converge a la función delta de Dirac si para cualquier $\psi \in C(I)$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\psi(x)dx = \psi(c).$$

Para continuar con nuestro ejemplo, veamos que la sucesión de funciones dada en 3.3 cumple con esta definición. Para comenzar, observemos que para todo n

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) dx = 1.$$

Como la función ϕ es continua sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $n > N$ y $x \in (c - 1/n, c + 1/n)$ entonces $\phi(c) - \epsilon < \phi(x) < \phi(c) + \epsilon$. Cuando $n > \max(N, M)$ tenemos

$$\begin{aligned} D_n(x)(\phi(c) - \epsilon) &\leq D_n(x)\phi(x) \leq D_n(x)(\phi(c) + \epsilon); \\ (\phi(c) - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x)dx \leq (\phi(c) + \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)dx; \\ \phi(c) - \epsilon &\leq \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x) dx \leq \phi(c) + \epsilon; \\ -\epsilon &\leq \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x) dx - \phi(c) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Así

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x) dx - \phi(c) \right| \leq \epsilon,$$

En resumen, encontramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x) dx = \phi(c).$$

Como los argumentos que hemos dado valen para toda función $\phi \in C(I)$ podemos decir que la secuencia D_n converge a la delta de Dirac. Este hecho lo denotaremos con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \delta(x - c)$$

en donde el proceso de límite se refiere al límite de las funciones D_n cuando actúan mediante integración sobre una función continua definida en alguna vecindad de c .

Existen otras sucesiones de funciones, cuyas actuaciones sobre funciones continuas, tienden a la delta de Dirac. El siguiente ejemplo lo proponemos como un teorema. En la demostración del teorema haremos uso del teorema de la convergencia dominada 2.6.

Teorema 3.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in L^1$, suave a trozos y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$. Sea $\phi(x)$ una función continua, acotada y definida en \mathbb{R} . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n f(nx) \phi(x) dx = \phi(0).$$

Demostración. Haciendo el cambio de variables $x = s/n$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} n f(nx) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \phi(s/n) ds$$

Como ϕ es continua, tenemos que para cada s fijo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s) \phi(s/n) = f(s) \phi(0)$. Por otro lado, como ϕ es acotada, esto es, $\forall x \in \mathbb{R}, |\phi(x)| \leq C$, entonces $|f(s) \phi(s/n)| \leq C |f(s)|$. Aplicando el teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \phi(s/n) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(s) \phi(s/n) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \phi(0) ds = \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = \phi(0) \cdot 1 \end{aligned}$$

y con esto, la demostración queda terminada.

Ejemplo 2 Consideremos $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$. Esta función cumple con $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (véase el ejercicio 3 en la página 18). El teorema anterior nos garantiza que $D_n(x) = n f(nx) = n/(\pi(1 + n^2 x^2))$ es una secuencia de

funciones que convergen a la delta de Dirac si pensamos en estas funciones actuando sobre el espacio de funciones ϕ continuas, acotadas y definidas en \mathbb{R} . La expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} = \delta(x),$$

en realidad dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \phi(x) dx = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx$$

para el espacio de las funciones $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y acotadas.

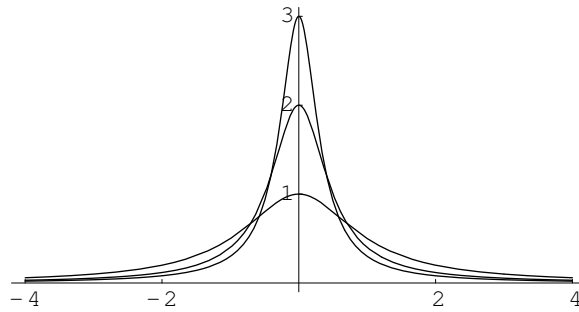


Figura 3.2: D_n para $n = 1, 2$ y 3

Una moraleja que podemos extraer de todo lo anteriormente expuesto es que existen sucesiones de funciones muy distintas que aproximan, en el límite, a la misma función delta de Dirac. Los pulsos rectangulares y las funciones $n/(\pi(1+n^2x^2))$ no se parecen mucho, pero sin embargo, ambas secuencias aproximan a la delta cuando $n \rightarrow \infty$.

3.2 Derivadas generalizadas de funciones suaves a trozos

Hasta ahora, hemos visto cómo la delta de Dirac nos da un lenguaje sintético para expresar el límite de ciertas integrales. Ahora vamos a ver cómo la delta nos va a ayudar a extender el concepto de derivada. Vamos a comenzar definiendo un espacio de funciones que será útil para definir la derivada generalizada.

Definición 3.2 Sea ϕ una función de \mathbb{R} en \mathbb{C} de clase C^∞ y U el conjunto de puntos de \mathbb{R} para los cuales ϕ es distinta de cero. A la clausura de U

(esto es, el conjunto cerrado “más pequeño” que contiene a U) lo llamaremos *el soporte de ϕ* . Si U está contenido en un intervalo de longitud finita, se dice que U es acotado y en este caso, se dice que el soporte de ϕ es un conjunto compacto (por ser un conjunto acotado y cerrado). Al conjunto de las funciones $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables y que tienen soporte compacto lo denotaremos con C_0^∞ .

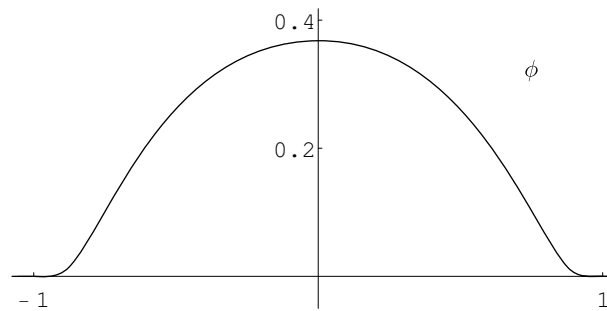


Figura 3.3: $\phi \in C_0^\infty$

Ejemplo 3 La función definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(-1/(1-x^2)) & \text{si } |x| < 1; \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

pertenece al conjunto de funciones C_0^∞ .

Ejemplos de funciones que pertenecen a este conjunto son por ejemplo las funciones dadas por: $\psi(x) = a(x)\phi(bx+c)$ donde a es una función C^∞ , $b \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Otro ejemplo lo encontrará el lector en el ejercicio 2. Más aún, como cualquier combinación lineal de funciones en C_0^∞ también pertenece a este conjunto, tenemos que C_0^∞ es un espacio vectorial.

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suave a trozos tal que f es C^∞ en $(-\infty, c)$ y en (c, ∞) y supongamos además que $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$. Sea ϕ una función que pertenece al espacio de funciones C_0^∞ . Queremos calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx$ en términos de una integral que involucre a ϕ (y no a la derivada de ϕ). Este cálculo nos va a conducir a la generalización del concepto de derivación en el contexto de funciones suaves a trozos. Para comenzar, observemos que la integral que queremos calcular está bien definida porque el producto de f por ϕ es una función acotada, continua a trozos que se anula

fuera de un intervalo de longitud finita. Para realizar el cálculo, usaremos integraciones por partes:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx \\
&= \lim_{\substack{S \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{-S}^{c-\epsilon} f(x)\phi'(x)dx + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{c+\epsilon}^R f(x)\phi'(x)dx \\
&= \lim_{\substack{S \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{-S}^{c-\epsilon} (f(x)\phi(x))' - f'(x)\phi(x)dx + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{c+\epsilon}^R (f(x)\phi(x))' - f'(x)\phi(x)dx \\
&= \lim_{\substack{S \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} f(x)\phi(x) \Big|_{-S}^{c-\epsilon} - \int_{-S}^{c-\epsilon} f'(x)\phi(x)dx + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} f(x)\phi(x) \Big|_{c+\epsilon}^R - \int_{c+\epsilon}^R f'(x)\phi(x)dx \\
&= f(c_-)\phi(c_-) - \int_{-\infty}^c f'(x)\phi(x)dx - f(c_+)\phi(c_+) - \int_c^{\infty} f'(x)\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

donde se usó que $\lim_{S \rightarrow -\infty} \phi(S) = \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R) = 0$ porque $\phi \in C_0^\infty$. Además, por ser ϕ una función continua, resulta que $\phi(c_-) = \phi(c_+) = \phi(c)$ de modo que la última igualdad la podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
& f(c_-)\phi(c_-) - \int_{-\infty}^c f'(x)\phi(x)dx - f(c_+)\phi(c_+) - \int_c^{\infty} f'(x)\phi(x)dx \\
&= -(f(c_+) - f(c_-))\phi(c) - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Al término $f(c_+) - f(c_-)$ lo llamaremos el *salto de la función f en el punto c* y lo denotaremos con $Sf(c)$. Aquí entra de nuevo la función delta de Dirac. Tal como dijimos en la página 21 el valor de la función ϕ en el punto c lo podemos escribir simbólicamente como $\phi(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c)\phi(x)dx$ (ϕ es continua en la recta real, en particular en un entorno de c). De modo que

$$\begin{aligned}
& -(f(c_+) - f(c_-))\phi(c) - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx \\
&= -Sf(c) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c)\phi(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (Sf(c)\delta(x-c)\phi(x) + f'(x)\phi(x))dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (Sf(c)\delta(x-c) + f'(x))\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Ahora parece natural definir la derivada generalizada de la función suave a trozos f como

$$f'_{\text{gen}}(x) = Sf(c) \delta(x - c) + f'(x) \quad (3.6)$$

y donde se entiende que $f'(x)$ está definida sólo en $\mathbb{R} - \{c\}$. En resumen, con la notación que hemos usado y las definiciones que hemos hecho tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\text{gen}}(x) \phi(x) dx. \quad (3.7)$$

Observación: La fórmula anterior sigue siendo válida en el caso en que f se anula afuera de un intervalo finito y ϕ es una función C^∞ . Más aún basta que el producto $f\phi$ se anule fuera de un intervalo finito.

Ejemplo 4 Calcular la derivada generalizada de la función de Heaviside (véase el ejemplo 1 en la página 7).

La función de Heaviside es una función suave a trozos con un único punto de discontinuidad en $c = 0$. El salto de la función H en ese punto es $H(0_+) - H(0_-) = 1 - 0 = 1$. Por otra parte, $H'(x) = 0$ cuando x pertenece a $\mathbb{R} - \{0\}$. Al principio del capítulo dijimos que la integral de Riemann de una función que es nula por todas partes excepto por un punto, multiplicada por cualquier otra función (continua por ejemplo) vale cero. De manera que si $\phi \in C_0^\infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x) \phi(x) dx = 0.$$

Por esta razón, identificaremos a la derivada función de Heaviside con la función idénticamente nula². Usando 3.6 tenemos:

$$H'_{\text{gen}}(x) = 1\delta(x - 0) + H'(x) = \delta(x) \quad (3.8)$$

También pudimos usar 3.7 para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H'_{\text{gen}}(x) \phi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \phi'(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(x) \Big|_0^R \\ &= -(0 - \phi(0)) = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

²En la próxima sección hablaremos más sobre estas identificaciones.

En ambos casos concluimos que la derivada generalizada de la función de Heaviside es la delta de Dirac.

Para funciones suaves a trozos que tienen más de un punto donde la función es discontinua tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave a trozos, continua excepto quizás en los puntos $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. La derivada generalizada de f es

$$f'_{\text{gen}}(x) = \sum_{k=1}^n Sf(c_k) \delta(x - c_k) + f'(x) \tag{3.9}$$

donde $f'(x)$ sólo se define en $\mathbb{R} - \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

Para demostrar este teorema, basta aplicar la función f sobre una función $\phi \in C_0^\infty$ e integrar por partes en los intervalos $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, \infty)$. Si en el teorema 3.2 la función suave a trozos f se anula fuera del intervalo (c_1, c_n) tiene sentido permitir que f actúe sobre el espacio de funciones C^∞ . Véase el ejercicio 3 para una demostración del teorema 3.2

Ejemplo 5 Calculemos $I(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(\lambda x) dx$ en donde $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1; \\ x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 0; \\ 1 - x/2, & \text{si } 0 \leq x < 2; \\ 0, & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

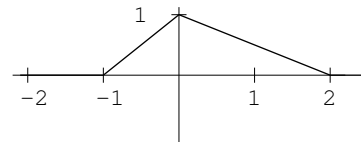


Figura 3.4

Como $f(x)$ es continua, todos los saltos son iguales a cero y $f'_{\text{gen}} = f'$. De hecho,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1; \\ 1, & \text{si } -1 < x < 0; \\ -1/2, & \text{si } 0 < x < 2; \\ 0, & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

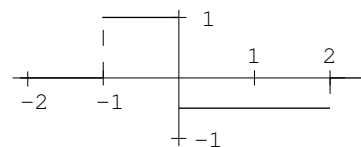


Figura 3.5

Ahora, calculemos la segunda derivada generalizada de $f(x)$; esto es simplemente, la derivada generalizada de f'_{gen} . Los saltos de f'_{gen} son $+1$, $-3/2$ y $+1/2$ en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, respectivamente. De manera que

$$f''_{\text{gen}} = \delta(x + 1) - 3/2\delta(x) + 1/2\delta(x - 2)$$

donde hemos identificado a $f''(x)$ con la función idénticamente nula. Ahora bien, usando la fórmula de integración por partes dos veces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^2}{dx^2}(\cos(\lambda x)) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\text{gen}}(x) \frac{d}{dx}(\cos(\lambda x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f''_{\text{gen}}(x) \cos(\lambda x) dx$$

Como $d^2/dx^2(\cos(\lambda x)) = -\lambda^2 \cos(\lambda x)$ se tiene que

$$-\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x + 1) - \frac{3}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - 2) \right) \cos(\lambda x) dx$$

$$\begin{aligned} -\lambda^2 I(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1) \cos(\lambda x) dx - \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cos(\lambda x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2) \cos(\lambda x) dx; \\ -\lambda^2 I(\lambda) &= \cos(-\lambda) - 3/2 \cos(0) + 1/2 \cos(2\lambda). \end{aligned}$$

De manera que el valor de la integral es

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{3}{2} - \cos(\lambda) - \frac{1}{2} \cos(2\lambda) \right),$$

lo cual concluye el ejercicio.

Integrales análogas a la que acabamos de estudiar se van a presentar a lo largo de este curso. Por tanto vale la pena tener presente el método visto en este ejemplo en el momento de calcular dichas integrales.

Hemos visto como la función delta de Dirac ha aparecido en un contexto teórico y en un contexto computacional, pero en ambos casos el propósito de la delta era facilitar la evaluación de ciertas integrales y el límite de integrales. A continuación, vamos a discutir el contexto general dentro del cual se encuentra enmarcada esta función.

3.3 Funciones generalizadas: funcionales lineales

Para poder definir funciones generalizadas, un ingrediente esencial es la elección de un espacio vectorial V de funciones sobre las cuales las funciones generalizadas van a operar. Al espacio vectorial de funciones V lo denominaremos el *espacio de funciones de prueba* y a las funciones $\phi \in V$ las llamaremos *funciones de prueba*. Dependiendo del contexto, V puede consistir del espacio de las funciones continuas sobre la recta real, o el espacio de las funciones continuas acotadas sobre la recta real, o el espacio de las funciones de clase C^∞ , u otro espacio.

Definición 3.3 Sea V un espacio de funciones fijo. Una *función generalizada sobre V* es un funcional lineal $K : V \rightarrow \mathbb{C}$ (véase la sección 1.2.1). El valor numérico de K sobre la función de prueba $\phi \in V$ lo denotaremos con $\langle K | \phi \rangle$ (K opera sobre ϕ) La linealidad de K queda expresada con la identidad

$$\langle K | \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle K | \phi_1 \rangle + \alpha_2 \langle K | \phi_2 \rangle,$$

donde ϕ_1, ϕ_2 , son funciones en V y α_1, α_2 son constantes en \mathbb{C} . También usaremos la notación $K(\phi)$ para indicar el valor numérico que se obtiene al evaluar K sobre funciones de prueba $\phi \in V$.

Una función generalizada con dominio igual a C_0^∞ también se llama una distribución de Schwartz, en honor al matemático Laurent Schwartz, quien en su famoso libro “Theorie des distributions” publicado en los años 50, fijó el lenguaje matemático adecuado para explicar de manera rigurosa las propiedades de las funciones generalizadas. Desde principios de siglo, matemáticos tales como Heaviside y físicos como Dirac manejaban ciertas funciones generalizadas, pero los cálculos eran realizados de manera heurística, sin justificación matemática sistemática. El matemático ruso Sobolev en los años 30 fue el primero en considerar las funciones generalizadas como operadores sobre funciones comunes y corrientes.

Las funciones ordinarias $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que son suaves a trozos y se anulan fuera de un intervalo (a, b) pueden ser consideradas como funciones generalizadas, tomando como espacio de funciones de prueba a $V = C^\infty$. Indicamos con K_f a la función generalizada asociada a f . El número que

arroja K_f cuando actúa sobre una función de prueba ϕ se define así:

$$K_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx \quad (3.10)$$

en donde $\phi(x) \in C^\infty = V$.

Para la función delta de Dirac concentrada en $x = c$, se puede usar la notación δ_c . El espacio de funciones de prueba V en este caso consiste de funciones continuas en un entorno del punto $x = c$. δ_c está dada por

$$\delta_c(\phi) = \phi(c) \quad \text{para todo } \phi \in V.$$

Obsérvese que δ_c es lineal:

$$\delta_c(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1\phi_1(c) + \alpha_2\phi_2(c) = \alpha_1\delta_c(\phi_1) + \alpha_2\delta_c(\phi_2)$$

Si V es el espacio de funciones continuas sobre la recta real podemos usar la notación de la integral ficticia

$$\delta_c(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c)\phi(x)dx.$$

Finalmente, tenemos la siguiente

Definición 3.4 Diremos que dos funciones generalizadas P y Q son iguales si para toda función de prueba $\phi \in V$ ocurre que los números $\langle P | \phi \rangle$ y $\langle Q | \phi \rangle$ son iguales. Esto es,

$$P = Q \quad \text{si y sólo si} \quad \forall \phi \in V \quad \langle P | \phi \rangle = \langle Q | \phi \rangle.$$

Esta definición no es vacía en contenido. Supongamos que tenemos dos funciones suaves a trozos f y g , que se anulan fuera del intervalo a, b . Supongamos además que f y g difieren sólo en un conjunto discreto de puntos de la recta real. (Un conjunto U es discreto en la recta real si cada punto de U está contenido en un entorno tal que en dicho entorno no hay ningún otro punto de U .) Definamos las funciones generalizadas asociadas a f y a g , K_f y K_g actuando sobre funciones $\phi \in C^\infty$ como en 3.10. Resulta que para toda $\phi \in C^\infty$ $K_f(\phi) = K_g(\phi)$, porque el resultado numérico de una integral no cambia si la función que se integra es modificada en un conjunto discreto de puntos. De manera que si bien f y g son funciones distintas, las distribuciones que estas funciones generan (debido a la definición 3.4) son idénticas.

3.3.1 Sumas de funciones generalizadas y sus productos por funciones C^∞

Se define la suma de funciones generalizadas $K_1, K_2 : V \rightarrow \mathbb{C}$ de la manera siguiente:

$$(K_1 + K_2)(\phi) = K_1(\phi) + K_2(\phi).$$

La multiplicación de funciones generalizadas no es tan sencilla de definir. En el caso en que el espacio de funciones de prueba V está contenido en C^∞ , podemos definir la multiplicación de una función ordinaria $\psi \in C^\infty$ por una función generalizada $K : V \rightarrow \mathbb{C}$. Para motivar esta definición, consideremos funciones generalizadas K_f obtenidas a partir de funciones ordinarias suaves a trozos f que se anulan fuera de (a, b) .

$$K_{\psi f}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x)f(x)]\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\psi(x)\phi(x)]dx = K_f(\psi\phi)$$

Por ser esto así vamos a definir, para cualquier función generalizada $K : V \rightarrow \mathbb{C}$ y cualquier función en $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ su producto como sigue:

$$\psi K(\phi) = K(\psi\phi)$$

para toda $\phi \in V = C^\infty$. Observamos que ψK está bien definida porque $\psi\phi \in V$.

Ejemplo 6 Veamos quién es $\psi(x)\delta(x - c)$ cuando $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\psi\delta_c(\phi) = \delta_c(\psi\phi) = \psi(c)\phi(c) = \psi(c)\delta_c(\phi);$$

de modo que $\psi\delta_c = \psi(c)\delta_c$, resultado que también podemos escribir así: $\psi(x)\delta(x - c) = \psi(c)\delta(x - c)$. Esta identidad parece intuitiva si pensamos que $\delta(x - c)$ es “igual a cero” cuando $x \neq c$.

3.3.2 Derivadas generalizadas

Para poder definir la derivada generalizada de una función generalizada sobre V , es necesario que este espacio de funciones de prueba sea *cerrado bajo diferenciación*: si $\phi(x) \in V$ debe ocurrir que $\phi'(x) \in V$. Si $K : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función generalizada definida sobre el espacio de funciones de prueba

V , definimos la derivada generalizada de K como otra función generalizada $K'_{\text{gen}} : V \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera :

$$K'_{\text{gen}}(\phi) := -K(\phi') \quad \text{para todo } \phi \in V.$$

Hemos dicho que si $f(x)$ es una función suave a trozos que se anula fuera de un intervalo acotado (a, b) , entonces genera una función generalizada $K_f : V = C^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ definida así

$$K_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx \quad \text{para toda } \phi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Veamos quién es la derivada generalizada $(K_f)'_{\text{gen}}$:

$$(K_f)'_{\text{gen}}(\phi) = -K_f(\phi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\text{gen}}(x)\phi(x)dx.$$

Así

$$(K_f)'_{\text{gen}} = K_{f'} + \sum_{i=1}^n Sf(c_i)\delta_{c_i},$$

donde usamos la fórmula de integración por partes hallada en la sección 3.2.

Es importante observar que las funciones generalizadas que actúan sobre las funciones $\phi \in V = C^\infty(\mathbb{R})$ tienen derivadas generalizadas de todo orden. De hecho, si $K : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función generalizada entonces

$$K''_{\text{gen}}(\phi) = -K'_{\text{gen}}(\phi') = K(\phi'')$$

y por inducción se tiene, en general que $K_{\text{gen}}^{(n)}$ cumple con

$$K_{\text{gen}}^{(n)}(\phi) = (-1)^n K(\phi^{(n)}).$$

Ejemplo 7 Calculemos ahora algunas derivadas generalizadas de la delta de Dirac concentrada en $x = c$, o sea, δ_c :

$$\delta'_c(\phi) = -\delta_c(\phi') = -\phi'(c).$$

En la notación de integrales ficticias tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-c)\phi(x)dx = -\phi'(c).$$

De la misma manera, $\delta''_c(\phi) = -\delta'_c(\phi') = \delta_c(\phi'') = \phi''(c)$.

Ejemplo 8 Calculemos $x\delta'(x)$ ($V = C^\infty$). Para resolver este problema, hagamos actuar a la distribución sobre una función de prueba

$$\begin{aligned}\langle x\delta'(x) | \phi(x) \rangle &= \langle \delta'(x) | x\phi(x) \rangle = -\langle \delta(x) | (x\phi(x))' \rangle = -\langle \delta(x) | \phi(x) + x\phi'(x) \rangle \\ &= -\langle \delta(x) | \phi(x) \rangle - \langle \delta(x) | x\phi'(x) \rangle = -\phi(0) = -\langle \delta(x) | \phi(x) \rangle.\end{aligned}$$

De manera que, como distribución, $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Ejemplo 9 También se puede probar que la fórmula de Leibniz $(\psi K)'_{\text{gen}} = \psi'K + \psi K'_{\text{gen}}$ es válida en este contexto.

$$\begin{aligned}(\psi K)'_{\text{gen}}(\phi) &= -(\psi K)(\phi') && \text{def. de derivada generalizada} \\ &= -K(\psi\phi') && \text{def. del producto de función por distribución} \\ &= -K((\psi\phi)' - \psi'\phi) && \text{derivada usual del producto} \\ &= -K((\psi\phi)') + K(\psi'\phi) && \text{por la linealidad de } K \\ &= K'_{\text{gen}}(\psi\phi) + K(\psi'\phi) && \text{def. de derivada generalizada} \\ &= (\psi K'_{\text{gen}})(\phi) + (\psi'K)(\phi) && \text{def. del producto de función por distribución} \\ &= (\psi K'_{\text{gen}} + \psi'K)(\phi). && \text{def. de suma de distribuciones}\end{aligned}$$

3.3.3 Límites de funciones generalizadas

El concepto de límite, en el contexto de las funciones generalizadas, tiene una definición directa y sencilla.

Definición 3.5 Sean K_1, K_2, \dots funciones generalizadas definidas en un espacio lineal V de funciones de prueba. Diremos que la función generalizada L es el límite de las funciones (generalizadas) K_n si para toda función de prueba $\phi \in V$ ocurre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle K_n | \phi \rangle = \langle L | \phi \rangle$$

y esto lo denotaremos con $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = L$.

La definición 3.5 es una generalización de 3.1. En el ejemplo 1 podemos pensar a las funciones D_n actuando sobre el espacio V de funciones continuas (en algún intervalo que contenga a c). A la luz de la definición 3.5 diremos que la sucesión de funciones generalizadas K_{D_n} convergen a la función generalizada delta de Dirac (concentrada en c).

Por otra parte, la definición 3.5 nos permite enunciar el siguiente

Teorema 3.3 Sean K_1, K_2, \dots funciones generalizadas definidas en un espacio lineal V de funciones de prueba. Supongamos que V es cerrado bajo diferenciación. Supongamos que la función generalizada L es el límite de las funciones K_1, K_2, \dots . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n)'_{\text{gen}} = L'_{\text{gen}}.$$

En el fondo, lo que dice este teorema es que uno puede intercambiar límites con derivadas generalizadas. La demostración de este teorema es sorprendentemente sencilla. Supongamos que $\phi \in V$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (K_n)'_{\text{gen}} | \phi \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle K_n | \phi' \rangle = - \langle L | \phi' \rangle = \langle L'_{\text{gen}} | \phi \rangle.$$

Como ϕ es una función arbitraria de V , estas igualdades valen para toda $\phi \in V$. De modo que es lícito escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n)'_{\text{gen}} = L'_{\text{gen}}.$$

Este resultado lo usaremos más adelante para justificar algunos pasos en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

En lo que resta de este libro en muchas ocasiones por comodidad, haremos el siguiente abuso de notación: Si la función f genera una distribución a través de una integral entonces usaremos el mismo símbolo (f) para designar dicha distribución. Esto es, en vez de escribir $\langle K_f | \phi \rangle$ escribiremos $\langle f | \phi \rangle$. En estos casos podemos pensar en la función f en dos contextos distintos. Uno como función de los reales a los complejos (o a los reales) y otro como función generalizada actuando sobre algún espacio de funciones V .

RESUMEN

Hasta ahora podíamos haber pensado que “puntos” y “números” eran los objetos más fundamentales en la física-matemática. La teoría de distribuciones parece decirnos que las “funciones de prueba” forman la estructura básica y que todo lo demás depende de ellas.

En este capítulo hemos intentado explicar cómo hacer cálculos con distribuciones y funciones de prueba. Siendo este su propósito no hemos mencionado las bases teóricas que sustentan estos cálculos por ejemplo, la continuidad de Schwartz y los espacios de Frechet.

El alcance también ha sido limitado por considerar sólo el caso de una variable real. En varias variables, el panorama es mucho más rico, donde uno

observa una interrelación entre la geometría diferencial y las ecuaciones de la física-matemática.

Ejercicios

1. Versión suavizada de la función de Heaviside. Sean $\phi(x)$ la función definida en la ecuación 3.5 e $I = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$ (I vale aproximadamente 0.443994). Haga un gráfico de la función

$$\eta(x) = 1/I \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

2. Versión suavizada de la función de un pulso cuadrado. Sea ϕ la función definida en la ecuación 3.5. Definamos $\psi_1(x) = \phi(x + 2)$ y $\psi_2(x) = \phi(x - 2)$. Haga un gráfico de la función

$$\chi(x) = 1/I \int_{-\infty}^x (\psi_1(t) - \psi_2(t)) dt$$

Observe que χ pertenece a C_0^∞ .

3. Sea f una función suave a trozos, discontinua en $c_1 < c_2$ e idénticamente nula fuera del intervalo (c_1, c_2) . Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞ . Haciendo las integraciones por partes que hagan falta, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\text{gen}}(x)\phi(x) dx$$

donde

$$f'_{\text{gen}}(x) = Sf(c_1)\delta(x - c_1) + Sf(c_2)\delta(x - c_2) + f'(x),$$

mostrando así la validez de la ecuación 3.9 del teorema 3.2 en este caso en particular.

4. Muestre que $\psi(x)\delta'(x - c) = \psi(c)\delta'(x - c) - \psi'(c)\delta(x - c)$.
5. Considere la función $G(t) = H(t)e^{-at}$. Demuestre que $G'_{\text{gen}}(t) + aG(t) = \delta(t)$
6. Considere la función $G(t) = (1/\omega)H(t) \text{sen } \omega t$. Calcule $(\frac{d^2}{dt^2_{\text{gen}}} + \omega^2 \mathbb{I})G(t)$.

7. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $f'_{\text{gen}}(x)$ y $f''_{\text{gen}}(x)$.

(b) Calcule $\int_{-1}^1 (1 - x^2) \cos(\lambda x) dx$, por medio de $\langle f'_{\text{gen}} | \phi \rangle = \langle f | \phi'' \rangle$.

8. Considere la función $g(x) = \frac{1}{2}H(x)(e^x - e^{-x})$.

(a) Grafique $g(x)$.

(b) Halle $g''_{\text{gen}}(x) - g(x)$.

9. Sea $r \gg 0$ y sea $D_r(x) = rH(x)e^{-rx}$.

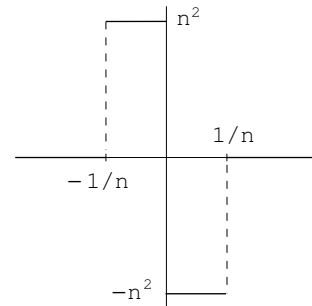
(a) Haga un gráfico de $D_r(x)$.

(b) Evalúe $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_r(x)f(x) dx$, donde f puede ser cualquier función continua y acotada.

(c) Identifique cuál es la función generalizada a la que corresponde $\lim_{r \rightarrow \infty} D_r(x)$.

10. Para n entero positivo se define

$$D_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1/n; \\ n^2, & \text{si } -1/n \leq x < 0; \\ -n^2, & \text{si } 0 \leq x < 1/n; \\ 0, & \text{si } 1/n \leq x. \end{cases}$$



(a) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x)\phi(x) dx$, donde $\phi(x) \in C^\infty$ es arbitraria.

(b) Relacione esto con $\delta(x)$ y sus derivadas.

11. Halle $u(x)$ suave a trozos, tal que $u(x) \equiv 0$ en $x < 0$ y en $x > 3$, y que satisfice

$$u''_{\text{gen}}(x) = \delta(x) - \frac{3}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x-3).$$

12. Sea f una función suave a trozos tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Definamos la función u como sigue

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-s)f(s) ds.$$

Demuestre que $u'_{\text{gen}}(t) = f(t)$.

13. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, podemos “discretizar” f de varias maneras. Considere, por ejemplo la función generalizada

$$D_m f(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \delta\left(x - \frac{k}{m}\right).$$

Compruebe que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle D_m f | \phi \rangle = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx,$$

para toda $\phi(x) \in C_0^\infty$.

14. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 x}{\pi(1+n^2 x^2)^2} = \delta'(x).$$

Sugerencia: véase el ejemplo 2.

Capítulo 4

Convolución

En los capítulos anteriores hemos establecido las herramientas básicas que usaremos a lo largo de este libro. Vamos a comenzar a usarlas para lograr el objetivo de este texto: desarrollar técnicas en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. El presente capítulo y los dos que le siguen, los dedicaremos a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para este propósito vamos a introducir el concepto de convolución y el de propagador causal (o sencillamente propagador). Comenzamos este capítulo motivando el concepto de convolución.

La ecuación diferencial más sencilla que se puede presentar es

$$v'(t) = f(t) \quad f(t_0) = c_0,$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y $c_0 \in \mathbb{C}$. El teorema fundamental del cálculo nos dice que la función v es

$$v(t) = c_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds. \tag{4.1}$$

Vamos a estar interesados en los valores de v para t mayor que t_0 . En este caso, podemos prescindir completamente de los valores de la función f para los t que son menores que t_0 . Esto lo podemos lograr multiplicando la función f por la función de Heaviside trasladada $H(s - t_0)$.

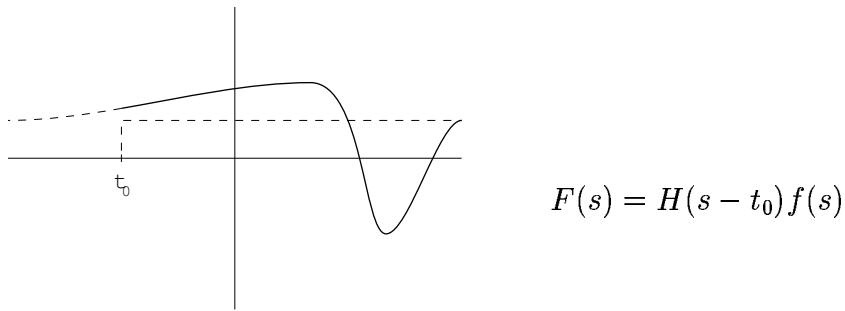


Figura 4.1

Si la condición inicial c_0 vale cero, podemos escribir a v en términos de F como

$$v(t) = \int_{-\infty}^t F(s) ds \quad (4.2)$$

Más aún, podemos reescribir 4.2 como una integral a lo largo de toda la recta real si multiplicamos a la función F por $H(t - s)$

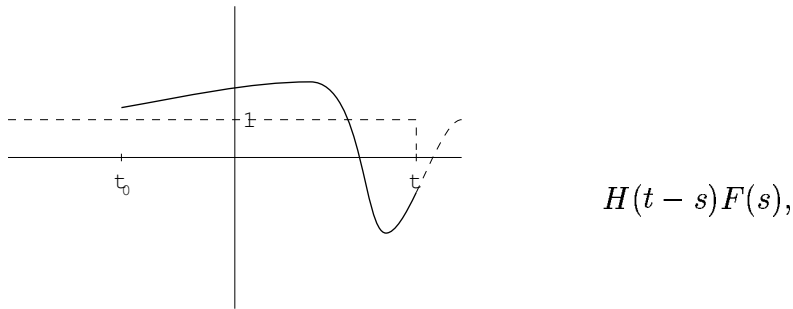


Figura 4.2

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - s)F(s) ds. \quad (4.3)$$

Esta manera de escribir la función v en términos de F puede parecer un poco caprichosa. Sin embargo, hay varias razones por las cuales vale la pena escribir la solución de esta manera.

- A diferencia de lo que ocurre en 4.1 los límites de integración son los mismos para todo t .

- La función de Heaviside nos da el primer ejemplo concreto de un propagador causal.
- La integral 4.3 es un ejemplo concreto de una convolución: la de H con F .

Un problema ligeramente más complicado consiste en resolver

$$\begin{aligned}v'(t) + av(t) &= f(t) \\v(t_0) &= c_0\end{aligned}$$

donde a es una constante y f una función C^∞ . Una técnica muy usada para resolver este problema es transformarlo en otro parecido al que acabamos de discutir. Para determinar explícitamente la función v multiplicamos la ecuación diferencial por una función, q

$$q(t)v'(t) + a q(t)v(t) = q(t)f(t)$$

donde pedimos que $q(t)v'(t) + a q(t)v(t) = (q(t)v(t))'$. La función q que satisface este problema se la llama factor integrante. Desarrollando el miembro derecho de esta última ecuación encontramos que $q(t)v'(t) + a q(t)v(t) = q(t)v'(t) + q'(t)v(t)$, ecuación que se resuelve pidiendo que q satisfaga $q'(t) = a q(t)$. Una solución para q es $q(t) = e^{at}$. Entonces

$$\begin{aligned}q(t)v'(t) + a q(t)v(t) &= q(t)f(t) \\(q(t)v(t))' &= q(t)f(t) \\\int_{t_0}^t (q(s)v(s))' ds &= \int_{t_0}^t q(s)f(s) ds \\q(t)v(t) - q(t_0)v(t_0) &= \int_{t_0}^t q(s)f(s) ds \\v(t) &= \frac{q(t_0)}{q(t)}v(t_0) + \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t q(s)f(s) ds \\v(t) &= e^{-a(t-t_0)}c_0 + e^{-at} \int_{t_0}^t e^{as} f(s) ds \\v(t) &= e^{-a(t-t_0)}c_0 + \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} f(s) ds\end{aligned}$$

Ahora procedemos igual que en el caso anterior. Supongamos que c_0 es igual a cero y que nos interesa la solución para $t > t_0$. Si definimos $F(s) =$

$H(s - t_0)f(s)$ y $G(s) = H(s)e^{-as}$ entonces podemos escribir la solución del problema como

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - s)F(s) ds \quad \text{para } t > t_0$$

La función G es el propagador causal del problema y la solución se escribe de nuevo, en términos de una integral de convolución.

Estos dos ejemplos ilustran la forma en que vamos a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Si bien hemos supuesto que la condición inicial es cero en ambos ejemplos esta no será la situación en el caso general. Comencemos definiendo la convolución de funciones.

4.1 Convolución

Definición 4.1 Sean f y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones cualesquiera. La convolución de f y g que denotaremos con $f * g$, es otra función cuyo valor en $t \in \mathbb{R}$ está dado por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s)g(s) ds$$

siempre y cuando la integral impropia converja.

En general, no es fácil determinar en qué casos la convolución $f * g$ de dos funciones f y g existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo hay un caso, de especial interés para nosotros para el cual está garantizado la existencia de la convolución de dos funciones.

Definición 4.2 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave a trozos. Diremos que f es *causal*¹ si existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $t < t_0$ entonces $f(t) = 0$. Esto es, si la función f se anula idénticamente para los valores de t que son menores que t_0 .

Ahora podemos enunciar el siguiente

¹En esta definición, pudimos usar “continuas a trozos” en vez de “suave a trozos”, pero en la física matemática son estas últimas las que aparecen con más frecuencia.

Teorema 4.1 Sean f y g dos funciones causales. La convolución $h(t) = (f * g)(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ y la función h es causal. Más aún, si $f(t) = H(t - a)v(t)$ y $g(t) = H(t - b)w(t)$ entonces

$$h(t) = H(t - a - b) \int_b^{t-a} v(t-s)w(s) ds$$

Para hacer la demostración, hagamos los gráficos de $f(t-s)$ y $g(s)^2$ como funciones de s . Observamos que $f(t-s) = f(-(s-t))$. Esto es, $f(t-s)$ se obtiene a partir de $f(s)$ primero reflejando la función con respecto al eje vertical y luego trasladándola t unidades.

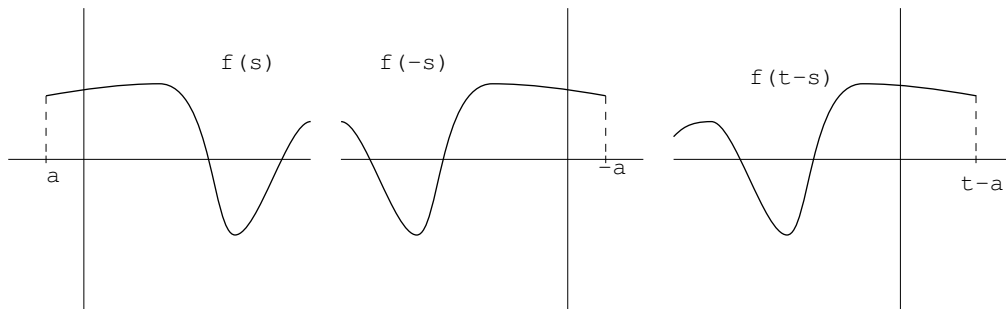


Figura 4.3: f reflejada y trasladada

Ahora, graficando $f(t-s)$ y $g(s)$ sobre el mismo eje s tenemos:

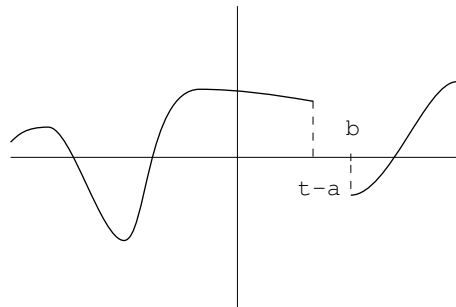


Figura 4.4: f y g no se solapan.

1. a) Si $t - a$ es menor que b como en la figura 4.4, entonces $f(t-s)g(s)$ es igual a cero para todo $s \in \mathbb{R}$ y por tanto $f * g(t) = 0$.

²Suponiendo que ambas funciones son reales.

2. b) Si en cambio, $t - a$ es mayor que b , entonces las funciones se solapan.

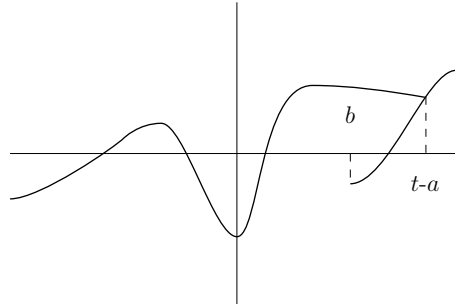


Figura 4.5: f y g se solapan.

En este caso, $(f * g)(t) = \int_b^{t-a} v(t-s)w(s) ds$.

Por lo tanto,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a + b \\ \int_b^{t-a} v(t-s)w(s) ds & \text{si } t > a + b, \end{cases}$$

Usando la función de Heaviside podemos resumir los dos casos en uno solo

$$h(t) = H(t - a - b) \int_b^{t-a} v(t-s)w(s) ds \quad (4.4)$$

y el teorema queda demostrado ³.

Casos particulares de la ecuación 4.4 son

$$h(t) = H(t - b) \int_b^t v(t-s)w(s) ds, \quad \text{si } a = 0; \quad (4.5)$$

$$h(t) = H(t) \int_0^t v(t-s)w(s) ds, \quad \text{si } a = b = 0. \quad (4.6)$$

Ejemplo 1 La convolución de la función de Heaviside consigo misma da

$$H * H(t) = H(t) \int_0^t 1 \cdot 1 ds = H(t)t$$

esto es, la función rampa.

³En realidad, falta mostrar que $\int_b^{t-a} v(t-s)w(s) ds$ es una función suave a trozos, pero esto lo aceptamos como un hecho.

A continuación, enunciaremos las propiedades de la convolución. Sean f , g y h tres funciones causales y α y β dos constantes. Entonces

1. $f * g = g * f$ Simetría.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ Asociatividad.
3. $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$ Linealidad.

La demostración de estas propiedades se deja al lector.

Para resolver ecuaciones diferenciales usando el concepto de convolución, es necesario extender este concepto para abarcar no sólo funciones causales suaves a trozos sino funciones generalizadas también.

4.1.1 Convolución de funciones generalizadas

Para motivar la extensión de la convolución hagamos la siguiente observación: Sea ϕ una función C^∞ que se anula para todo t mayor o igual que un cierto t_ϕ . Diremos que ϕ es *anticausal*. Sea f es una función causal suave a trozos, entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t) dt$$

existe y por tanto define una acción de la función causal f sobre ϕ . Basados en esta observación denotemos con \mathcal{A} al espacio de todas las funciones $\phi \in C^\infty$ anticausales. Este espacio jugará el papel de espacio de funciones de prueba. Denotemos con \mathcal{B} al conjunto de funcionales lineales que operan sobre \mathcal{A} . \mathcal{B} es un conjunto no vacío puesto que en él se encuentran todas las funciones causales suaves a trozos vistas como funciones generalizadas. Más aún, hemos visto que si f y $g \in \mathcal{B}$ son causales y continuas a trozos entonces su convolución también está en \mathcal{B} . De manera, que tiene sentido definir la acción de $f * g$ sobre una función $\phi \in \mathcal{A}$. En particular tenemos

$$\begin{aligned} \langle f * g | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds \right) \phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(s)\phi(x+s) ds dx, \end{aligned}$$

luego de hacer el cambio de variables $t = x + s$. Esta discusión sobre la manera como opera la convolución de funciones causales suaves a trozos sobre funciones de prueba ϕ motiva la siguiente

Definición 4.3 Sean f y g dos funciones generalizadas cualesquiera en \mathcal{B} . Entonces, la convolución de f por g es la función generalizada dada por

$$\langle f * g | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(s) \phi(x + s) ds dx.$$

Se sigue de esta definición que a nivel de funciones generalizadas, ocurre $f * g = g * f$.

Observando que para funciones causales f , g y h ocurre

$$\langle (f * (g * h)) | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s_1) g(s_2) h(s_3) \phi(s_1 + s_2 + s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

(véase el ejercicio 2), hacemos la siguiente

Definición 4.4 Sean f , g y h tres funciones generalizadas cualesquiera en \mathcal{B} . Entonces, la convolución de f por $g * h$ es la función generalizada dada por

$$\langle (f * (g * h)) | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s_1) g(s_2) h(s_3) \phi(s_1 + s_2 + s_3) ds_1 ds_2 ds_3.$$

Se sigue de esta definición que a nivel de funciones generalizadas, $f * (g * h) = (f * g) * h$. La linealidad se deja como ejercicio al lector.

En lo que sigue, cualquier propiedad sobre la convolución que valga para funciones causales se extenderá *mutatis mutandis* a toda función generalizada en \mathcal{B} .

Ejemplo 2 Sea $f \in \mathcal{B}$ una función causal suave a trozos y $g(t) = \delta(t - a)$ la delta de Dirac concentrada en a . Entonces

$$\begin{aligned} \langle f * g | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(s - a) \phi(t + s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t + a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) \phi(t) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto, el efecto de la tomar la convolución de $f(t)$ con $\delta(t - a)$ es reemplazar $f(t)$ por su traslación $f(t - a)$. En particular, la convolución de $f(t)$ con $\delta(t)$ deja a $f(t)$ igual:

$$f * \delta = \delta * f = f, \quad \text{para todas las funciones causales } f.$$

Este resultado se extiende a toda función generalizada en \mathcal{B} .

4.1.2 Derivada generalizada de la convolución

Finalmente, observemos que toda función de prueba en \mathcal{A} está en C^∞ . Como dijimos en el capítulo 3 esto nos permite definir la derivada generalizada de las funciones en \mathcal{B} . En particular tenemos que

$$\langle (f * g)'_{\text{gen}} | \phi \rangle = -\langle f * g | \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t)\phi'(s+t) ds dt.$$

Usando la definición de la derivada generalizada de $g(t)$ actuando sobre la función de prueba $\phi(s+t)$, con s fijo y t variable, encontramos que

$$-\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi'(s+t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g'_{\text{gen}}(t)\phi(s+t) dt,$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} \langle (f * g)'_{\text{gen}} | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g'_{\text{gen}}(t)\phi(s+t) ds dt \\ &= \langle f * g'_{\text{gen}} | \phi \rangle \end{aligned}$$

De manera que la regla de la derivada de una convolución difiere notoriamente de la regla de Leibniz para derivar un producto de funciones

$$\langle (f * g)'_{\text{gen}} | \phi \rangle = \langle f * g'_{\text{gen}} | \phi \rangle = \langle f'_{\text{gen}} * g | \phi \rangle.$$

Ejemplo 3 Sea f una función generalizada en \mathcal{B} y H la función de Heaviside. Entonces

$$(H * f)'_{\text{gen}} = H'_{\text{gen}} * f = \delta * f = f \quad (4.7)$$

4.2 Ecuaciones diferenciales: ejemplos

Retomemos el primer problema que abordamos al principio de este capítulo. Sea $f \in C^\infty$. Queremos encontrar una función v tal que

$$\begin{aligned} v'(t) &= f(t) \quad \text{para } t > t_0 \\ v(t_0) &= c_0 \end{aligned}$$

Definamos $u(t) = H(t - t_0)v(t)$. Por todo lo que hemos visto, la derivada generalizada de u vale

$$\begin{aligned} u'_{\text{gen}}(t) &= \delta(t - t_0)v(t) + H(t - t_0)v'(t) \\ &= \delta(t - t_0)v(t_0) + H(t - t_0)f(t) \\ &= \delta(t - t_0)c_0 + H(t - t_0)f(t) \\ &:= F(t) \end{aligned}$$

en donde para pasar de la primera línea a las dos que le siguen, sólo hemos usado el hecho de que estamos asumiendo que v es la solución del problema. La última línea es sencillamente la definición de la función generalizada F . Esta función pertenece claramente a \mathcal{B} . Afirmamos que dado que u satisface

$$u'_{\text{gen}}(t) = F(t)$$

entonces u está dado por

$$u(t) = (H * F)(t).$$

En efecto, la ecuación 4.7 nos dice que $u'_{\text{gen}}(t) = F(t)$. Esto es así es porque la función de Heaviside satisface $H'_{\text{gen}}(t) = \delta(t)$. Calculemos u explícitamente:

$$\begin{aligned} u(t) &= (H * F)(t) \\ &= (H * \delta_{t_0})(t)c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} H(t - s)H(s - t_0)f(s) ds \\ &= H(t - t_0)c_0 + H(t - t_0) \int_{t_0}^t f(s) ds \\ &= H(t - t_0) \left(c_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds \right). \end{aligned}$$

$$\text{y } v(t) = c_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

El segundo problema, encontrar la solución a

$$\begin{aligned}v'(t) + av(t) &= f(t) \\v(t_0) &= c_0,\end{aligned}$$

se resuelve de manera similar. Definamos $u = H(t - t_0)v(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}u'_{\text{gen}}(t) + au(t) &= \delta(t - t_0)v(t) + H(t - t_0)v'(t) + aH(t - t_0)v(t) \\&= \delta(t - t_0)v(t_0) + H(t - t_0)(v'(t) + av(t)) \\&= \delta(t - t_0)c_0 + H(t - t_0)f(t) \\&:= F(t)\end{aligned}$$

Si encontramos una función generalizada G tal que $G'_{\text{gen}}(t) + aG(t) = \delta(t)$ afirmamos que u está dada por

$$u(t) = (G * F)(t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}u'_{\text{gen}} + au &= G * F'_{\text{gen}} + aG * F = G'_{\text{gen}} * F + aG * F \\&= (G'_{\text{gen}} + aG) * F = \delta * F = F\end{aligned}$$

Ahora, nosotros sabemos quien es G (véase el ejercicio 5 del capítulo 3). $G(t) = H(t)e^{-at}$. Podemos calcular explícitamente quién es u

$$\begin{aligned}u(t) &= (G * F)(t) \\&= (G * \delta_{t_0})(t)c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)H(s-t_0)f(s) ds \\&= G(t-t_0)c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} H(t-s)e^{-a(t-s)}H(s-t_0)f(s) ds \\&= H(t-t_0)e^{-a(t-t_0)}c_0 + H(t-t_0) \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)}f(s) ds \\&= H(t-t_0) \left(e^{-a(t-t_0)}c_0 + \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)}f(s) ds \right)\end{aligned}$$

4.3 Ecuaciones diferenciales: caso general

Queremos desarrollar la técnica de cómo resolver una ecuación diferencial ordinario de grado n , lineal con coeficientes constantes.

Para ello consideremos las constantes complejas $\{a_k\}$, con $k = 0, 1, \dots, n$ donde vamos a suponer que $a_n \neq 0$. Sea L el operador dado por

$$L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \mathbb{I} \quad (4.8)$$

que, actuando sobre funciones en C^∞ produce

$$L(v)(t) = a_n \frac{d^n v}{dt^n}(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}}(t) + \dots + a_1 \frac{dv}{dt}(t) + a_0 v(t)$$

(como a_n es distinto de cero esta es una ecuación diferencial de orden n).

Supongamos, que queremos resolver

$$L(v)(t) = f(t) \quad (4.9)$$

con las condiciones iniciales

$$v(t_0) = c_0, v'(t_0) = c_1, \dots, v^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, v^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}. \quad (4.10)$$

Para resolver este problema, vamos a comenzar igual que en los dos ejemplos que vimos arriba. A partir de v definimos la función causal $u(t) = H(t - t_0)v(t)$. Calculemos las derivadas generalizadas de u . La primera es

$$u'_{\text{gen}}(t) = c_0 \delta(t - t_0) + H(t - t_0)v'(t),$$

la segunda arroja

$$u''_{\text{gen}}(t) = c_0 \delta'_{\text{gen}}(t - t_0) + c_1 \delta(t - t_0) + H(t - t_0)v''(t),$$

y así sucesivamente hasta que calculamos la n -ésima derivada:

$$\begin{aligned} u_{\text{gen}}^{(n)}(t) &= c_0 \delta_{\text{gen}}^{(n-1)}(t - t_0) + c_1 \delta_{\text{gen}}^{(n-2)}(t - t_0) + \dots \\ &\quad + c_{n-2} \delta'_{\text{gen}}(t - t_0) + c_{n-1} \delta(t - t_0) + H(t - t_0)v^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Multiplicando la k -ésima derivada generalizada de u por a_k y tomando la suma desde $k = 0$ hasta $k = n$ encontramos que el operador L_{gen} actuando sobre u arroja una expresión que la podemos escribir como

$$L_{\text{gen}}(u)(t) = C(t) + H(t - t_0) L(v)(t),$$

en donde $C(t)$ recoge todas los términos que contienen a la función δ_{t_0} y sus derivadas (hasta orden $n - 1$) y el segundo término se obtiene de sacar factor común la función de Heaviside en todos los factores que contienen a las derivadas de la función v . Es fácil ver, que la función de Heaviside termina multiplicando al operador L actuando sobre v . Encontramos que

$$L_{\text{gen}}(u)(t) = C(t) + H(t - t_0) L(v)(t) = C(t) + H(t - t_0)f(t) := F(t)$$

donde la última igualdad define la función generalizada F . A partir de aquí adoptamos el siguiente punto de vista. Tenemos la función F dada por

$$F(t) = C(t) + H(t - t_0)f(t)$$

($C(t)$ contiene la información sobre las condiciones iniciales del problema) y nos proponemos resolver

$$L_{\text{gen}}(u)(t) = F(t). \quad (4.11)$$

Para resolver esta ecuación buscamos el propagador G del problema, esto es una función causal, suave a trozos que satisface

$$L_{\text{gen}} G = \delta.$$

Con esta función entre manos afirmamos que la solución u del problema 4.11 está dada por

$$u(t) = (G * F)(t). \quad (4.12)$$

Para ver que esto es así, vamos a demostrar el siguiente par de lemas.

Lema 4.1 Sean K y $E \in \mathcal{B}$ dos funciones generalizadas. Entonces,

$$(K * E)_{\text{gen}}^{(n)} = K_{\text{gen}}^{(n)} * E.$$

En efecto,

$$(K * E)_{\text{gen}}^{(n)} = ((K * E)'_{\text{gen}})_{\text{gen}}^{(n-1)} = (K'_{\text{gen}} * E)_{\text{gen}}^{(n-1)} = K_{\text{gen}}^{(n)} * E.$$

Lema 4.2 Sea L un operador diferencial como el definido en 4.8. Entonces,

$$L_{\text{gen}}(K * E) = L_{\text{gen}}(K) * E.$$

En efecto, usando el lema 4.1 y la linealidad de la convolución tenemos

$$\begin{aligned}
L_{\text{gen}}(K * E) &= \\
&= a_n(K * E)_{\text{gen}}^{(n)} + a_{n-1}(K * E)_{\text{gen}}^{(n-1)} + \cdots + a_1(K * E)'_{\text{gen}} + a_0(K * E) \\
&= a_n K_{\text{gen}}^{(n)} * E + a_{n-1} K_{\text{gen}}^{(n-1)} * E + \cdots + a_1 K'_{\text{gen}} * E + a_0 K * E \\
&= (a_n K_{\text{gen}}^{(n)} + a_{n-1} K_{\text{gen}}^{(n-1)} + \cdots + a_1 K'_{\text{gen}} + a_0 K) * E \\
&= L_{\text{gen}}(K) * E.
\end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar que la afirmación 4.12 es cierta. Encontramos que

$$L_{\text{gen}}(u)(t) = L_{\text{gen}}(G * F)(t) = (L_{\text{gen}} G * F)(t) = (\delta * F)(t) = F(t),$$

de manera que 4.12 resuelve 4.11.

En resumen, si tenemos un operador diferencial dado por

$$L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \mathbb{I}$$

y queremos resolver

$$L(v)(t) = f(t)$$

junto con la condiciones iniciales dadas por

$$v(t_0) = c_0, v'(t_0) = c_1, \dots, v^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, v^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

entonces, comenzamos definiendo

$$F(t) = L_{\text{gen}}\left(H(t - t_0)v(t)\right) = C(t) + H(t - t_0)f(t),$$

buscamos el propagador G del problema y construimos

$$u(t) = (G * F)(t).$$

Resulta que la función causal u así construida, siempre se puede factorizar como $u(t) = H(t - t_0)v(t)$ y la función v es la solución buscada. Más aún, u se descompone en

$$u = G * F = G * (C + \tilde{f}) = G * C + G * \tilde{f} = u_1 + u_2,$$

donde $\tilde{f}(t) = H(t - t_0)f(t)$. De manera tal que v también se descompone como

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t).$$

La función v_1 es una solución de la ecuación homogénea

$$L_{\text{gen}}(v_1)(t) = 0$$

que se encarga de cuadrar las condiciones iniciales del problema y v_2 es una solución particular de

$$L_{\text{gen}}(v_2)(t) = f(t)$$

que cumple con $v_2(t_0) = 0$.

Volvamos a reconsiderar los dos ejemplos que discutimos al principio de este capítulo a la luz de las consideraciones que hemos hecho. En el primero, el operador L era simplemente $L = d/dt$, El propagador era $G(t) = H(t)$ y habíamos encontrado que $C(t) = c_0\delta(t - t_0)$ y que $\tilde{f}(t) = H(t - t_0)f(t)$. Con $F(t) = C(t) + \tilde{f}(t)$ encontramos

$$u(t) = (H * F)(t) = H(t - t_0) \left(c_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds \right).$$

De modo que $v_1(t) = c_0$ es una constante (solución de la homogénea) y $v_2(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds$ es una solución de la particular (que cumple con $v_2(t_0) = 0$).

En el segundo problema, el operador L era $d/dt + a\mathbb{I}$, el propagador causal $G(t) = H(t)e^{-at}$ y habíamos encontrado que $C(t) = c_0\delta(t - t_0)$ y $\tilde{f}(t) = H(t - t_0)f(t)$. Con $F(t) = C(t) + \tilde{f}(t)$ encontramos

$$u(t) = (H * F)(t) = H(t - t_0) \left(c_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} f(s) ds \right).$$

De manera que $v_1(t) = c_0 e^{-a(t-t_0)}$ (de nuevo, una solución de la homogénea) y $v_2(t) = \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} f(s) ds$, una solución de la particular (que cumple con $v_2(t_0) = 0$).

Todo esto estuvo muy bien, entre otras cosas porque en ambos casos teníamos a la mano el propagador del problema. La pregunta natural a responder es ¿cómo encontrar la función G en el caso general?

4.4 Propagadores Causales

Analicemos la situación. Supongamos que nuestro operador L está dado por

$$L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \mathbb{I}$$

con $a_n \neq 0$. El propagador de este operador es una función causal, suave a trozos que satisface

$$L_{\text{gen}}(G)(t) = \delta(t).$$

De manera que parece sensato pensar que G lo podemos describir como

$$G(t) = H(t)g(t)$$

donde pedimos que g sea una función C^∞ para que las únicas discontinuidades que pueda tener G o las derivadas de G estén en $t = 0$. Siendo esto así sabemos que cuando L opere sobre G obtendremos

$$L_{\text{gen}}(G)(t) = C(t) + H(t)L(g)(t) \quad (4.13)$$

Pedimos adicionalmente que g satisfaga

$$L(g)(t) = 0$$

para que en la ecuación 4.13 el término que multiplica a la función de Heaviside desaparezca: la función g debe ser una solución de la homogénea. Es claro que la δ saldrá de $C(t)$. Esto nos conduce al problema de las condiciones iniciales que debe satisfacer g . En efecto, $C(t)$ contiene a g y a sus derivadas evaluadas en cero multiplicando a la función δ y sus derivadas. De hecho si miramos el término que multiplica a la delta, encontramos que dicho término es

$$g(0)a_1 + g'(0)a_2 + \cdots + g^{(n-2)}(0)a_{n-1} + g^{(n-1)}(0)a_n. \quad (4.14)$$

Más aún, ningún otro término de los que aparece en $C(t)$ contiene a la constante $g^{n-1}(0)$. (Véase los ejercicios). De manera que si pedimos que la función g cumpla con las condiciones iniciales

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{n-2}(0) = 0$$

y

$$g^{(n-1)} = \frac{1}{a_n},$$

estaremos garantizando que $C(t)$ sea igual a $\delta(t)$.

En resumen, hemos descubierto que el propagador del operador L es la función

$$G(t) = H(t)g(t),$$

donde g satisface la ecuación homogénea $L(g)(t) = 0$ junto con las condiciones iniciales

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n-2)}(0) = 0 \text{ y } g^{(n-1)} = \frac{1}{a_n}$$

Si bien es cierto que la teoría que hemos desarrollada es potente y sistemática, no contamos aún con herramientas para resolver las ecuaciones en derivadas generalizadas que han aparecido. El próximo capítulo está dedicado a resolver esta dificultad.

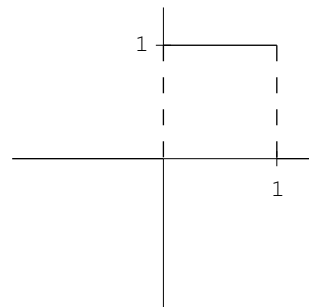
Ejercicios

1. Demuestre las tres propiedades de la convolución enunciadas a continuación del ejemplo 1
2. Sean f , g y h funciones causales y $\phi \in \mathcal{A}$ demuestre que

$$\langle (f * (g * h)) | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s_1)g(s_2)h(s_3)\phi(s_1 + s_2 + s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

3. Sea f una función continua en \mathbb{R} . A partir de f , se desea construir otra función F cuyo valor en x sea el promedio aritmético de f sobre $x - 1 \leq t \leq x + 1$. Encuentre una función p suave a trozos tal que $F = p * f$.
4. Sea H la función de Heaviside. Calcular $(H * H * H)(t)$

5. Sea p la función dada en la figura



- (a) Calcular $(H * p)(t)$
- (b) Sea $p_1(t) = p(t - 1)$. Calcular $(H * p_1)(t)$
6. Sean f y g dos funciones tales que para todo t existe $h(t) = (f * g)(t)$. Sean $F(t) = f(t - a)$ y $G(t) = g(t - b)$. Calcular $(F * G)(t)$ en términos de h .
7. Sea f una función suave a trozos $F(t) = H(t - t_0)f(t)$ y $u(t) = (H * F)(t)$ Mostrar que
- (a) $u(t) = H(t - t_0) \int_{t_0}^t f(t) dt$
- (b) $u'_{\text{gen}}(t) = F(t)$
- (c) u es continua en t_0 .
8. Sea p la función dada en el ejercicio 4. Calcule $p * p$ (Sugerencia: calcule $(u * u)'_{\text{gen}}(t)$ y use los resultados de los ejercicios 5, 6, 7.
9. Calcule $p * p * p$
- (a) Verifique que $p * p * p$ vale $-x^2 + 3x - 3/2$ en $1 < x < 2$.
- (b) Diga cual es el menor intervalo fuera del cual $p * p * p$ es idénticamente nula.
10. (a) Sean a y b números reales. Calcule la convolución $(\delta_a * \delta_b)(t)$
- (b) Sea u una función causal. Simplifique la expresión $\frac{d^n \delta}{dt^n} * u$
11. Sean

$$L = a_3 \frac{d^3}{dt^3} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \mathbb{I},$$

g una función C^∞ y $G = H g$. Calcule $L_{\text{gen}} G$ y verifique la ecuación 4.14 para este caso particular.

12. Calcule el propagador del operador $L = d^2/dt^2$.
13. Calcule el propagador del operador $L = d^2/dt^2 - \omega^2\mathbb{I}$.
14. Calcule el propagador del operador $L = d^2/dt^2 + \omega^2\mathbb{I}$.
15. ¿Cuáles son los posibles valores de α y β para que $\lim_{t \rightarrow \infty} (f * g)(t) = 0$, donde f y g están dadas por $f(t) = H(t)e^{\alpha t}$ y $g(t) = H(t)e^{\beta t}$?
16. Sea $f(x) = H(x)e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Calcule $f * f$ en términos de f .

Capítulo 5

La Transformada de Laplace

Este capítulo lo vamos a dedicar a desarrollar una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas generalizadas. El capítulo está organizado como sigue: comenzamos dando la definición de la transformada de Laplace. A continuación damos las propiedades de la transformada y al final estudiamos el problema de la solución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.

5.1 Transformada de Laplace: Definición

En cualquier libro de texto podemos ver la fórmula $U(z) = \int_0^\infty u(t)e^{-zt} dt$. Pero por razones que veremos más adelante, preferimos definir la transformada de Laplace así:

Definición 5.1 Sea $u(t)$ una función de \mathbb{R} en \mathbb{C} . La *transformada de Laplace* de u es una función $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cuyo valor en $z \in \mathbb{C}$ vale

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt} dt \quad (5.1)$$

siempre que la integral impropia exista.

El teorema que sigue establece condiciones suficientes para que una función tenga transformada de Laplace.

Teorema 5.1 Sea u una función causal (véase la definición 4.2). Supongamos que existen números reales $k \geq 0$ y $\sigma_0 \geq 0$ tales que para todo t

ocurre que $|u(t)| < k e^{\sigma_0 t}$, entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt} dt$ existe para todo $z = \sigma + i\omega$ con $\sigma > \sigma_0$.

La demostración de este teorema es sencilla. Puesto que u es causal, existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que si $t < b$ entonces $u(t) = 0$. Supongamos que $z = \sigma + i\omega$ y que $\sigma > \sigma_0$. Entonces,

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt} dt = \int_b^{\infty} u(t)e^{-zt} dt.$$

Pero,

$$\begin{aligned} |u(t)e^{-zt}| &= |u(t)| |e^{-zt}| \\ &\leq k e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} = k e^{-(\sigma - \sigma_0)t}. \end{aligned}$$

Puesto que la integral $\int_b^{\infty} k e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt$ es finita, el criterio de comparación 2.1 nos permite asegurar que $\int_b^{\infty} u(t)e^{-zt} dt$ existe y el valor de U en z está bien definido.

Diremos que una función $u(t)$ cuyo valor absoluto está acotado por una función de la forma $k e^{\sigma_0 t}$ es una *función de crecimiento exponencial*. Si adicionalmente la función u es causal, el teorema precedente nos asegura que la transformada de Laplace de esta función existe, al menos en el semiplano $\{z \mid \operatorname{Re} z > \sigma_0\}$. En general, lo que ocurre es que la transformada de Laplace $U(z)$ de una de estas funciones, vista como una función de una variable compleja, puede extenderse más allá del semiplano antes mencionado.

Consideremos los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1 La transformada de Laplace de $u(t) = H(t)$ es $U(z) = 1/z$. (Véase el ejemplo 4 en la página 9.) En este caso, si bien la integral converge sólo en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ la fórmula para $U(z)$ tiene sentido en todo el plano complejo salvo el punto $z = 0$.

Ejemplo 2 Calcular la transformada de Laplace de $u(t) = H(t - t_0)$. Si $\operatorname{Re} z > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - t_0) e^{-zt} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-zt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_{t_0}^R = \frac{e^{-t_0 z}}{z}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Para cualquier número complejo α la transformada de Laplace de $u(t) = H(t)e^{\alpha t}$ es $U(z) = 1/(z - \alpha)$:

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(z-\alpha)} dt = \frac{1}{z - \alpha} \text{ si } \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \alpha.$$

De manera que la región donde la integral converge es el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \alpha\}$. Sin embargo, la fórmula para $U(z)$ tiene sentido en todo el plano complejo, menos $z = \alpha$.

Ejemplo 4 $u(t) = H(t)e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace. Esta función es causal, pero crece muy rápido cuando t tiende a infinito: para cualquier σ real $u(t)e^{\sigma t} = H(t)e^{(t^2 - \sigma t)}$ no es acotada y por su fuerte crecimiento no se puede integrar.

5.2 Transformadas de Laplace de funciones generalizadas

Hemos visto que si u es una función causal y de crecimiento exponencial, su transformada de Laplace existe, en alguna región W del plano complejo. En lo sucesivo adoptaremos el punto de vista en donde u actúa como un funcional sobre la función e^{-zt} con $z \in W$. Así por ejemplo si $u(t) = H(t)$ entonces podemos pensar en $U(z)$ como expresada por

$$U(z) = \langle H(t) \mid e^{-zt} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-zt} dt = 1/z \text{ si } \operatorname{Re} z > 0.$$

Lo interesante de este punto de vista es que nos permite ampliar enormemente la gama de funciones para las cuales podemos definir su transformada de Laplace.

Ejemplo 5 La transformada de Laplace de $u(t) = \delta(t)$ es $U(z) = 1$. En efecto,

$$U(z) = \langle \delta(t) \mid e^{-zt} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-zt} dt = e^{-zt} \Big|_{t=0} = 1$$

Ejemplo 6 La transformada de Laplace de $u(t) = \delta'(t)$ es $U(z) = z$. En efecto,

$$\begin{aligned} U(z) &= \langle \delta'(t) \mid e^{-zt} \rangle = -\langle \delta(t) \mid (e^{-zt})' \rangle \\ &= -\langle \delta(t) \mid -z e^{-zt} \rangle = z \langle \delta(t) \mid e^{-zt} \rangle = z \end{aligned}$$

Obsérvese en los dos ejemplos anteriores, que con la definición de transformada de Laplace $U(z) = \int_0^\infty u(t)e^{-zt}dt$ que aparece en muchos textos no podríamos definir la transformada de la función delta ni mucho menos la de la derivada de una delta (a veces llamada “dipolo”).

¿Es necesario tener que memorizar todas estas fórmulas o hacer los mismos cálculos tediosos repetidamente? Hasta cierto punto el cálculo de transformadas de Laplace se simplifica si se usan las propiedades de la transformada (o teoremas operacionales), que enunciaremos a continuación.

5.3 Propiedades de la Transformada de Laplace

A lo largo de esta sección, vamos a asumir que las funciones u y v que aparecen más abajo, son funciones causales y de crecimiento exponencial. Para simplificar la discusión introduzcamos la siguiente notación. Si U es la transformada de Laplace de u entonces escribiremos $U = \mathcal{L}(u)$ o bien $U(z) = \mathcal{L}(u(t))(z)$.

1. (Transformada de la derivada generalizada en el tiempo). Si la transformada de $u(t)$ es $U(z)$ entonces la transformada de la derivada generalizada $u'_{\text{gen}}(t)$ es $zU(z)$. En efecto, esto se desprende de la propia definición de derivada generalizada:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u'_{\text{gen}}(t) e^{-zt} dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (e^{-zt})' dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} -z u(t) e^{-zt} dt = z \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-zt} dt = \\ &= zU(z) \end{aligned}$$

2. (Derivada en el plano frecuencia de la transformada $U(z)$). Sea $U = \mathcal{L}(u)$, la transformada de Laplace de u . Entonces la derivada compleja $U'(z)$ aparece como la transformada de la función $-tu(t)$. Para ver esto simplemente se deriva $U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt}dt$ bajo el signo de la integral. (En realidad, aquí hay que tener cuidado con los procesos de límites que aparecen, pero en esta discusión no entraremos en estos detalles.) Observe que esta propiedad también dice que la transformada de $tu(t)$ es $-U'(z)$.

3. (Traslaciones en tiempo y frecuencia). Si $U = \mathcal{L}(u)$ entonces tenemos que:

(a)

$$\mathcal{L}(u(t - t_0))(z) = U(z)e^{-t_0 z}$$

(b)

$$\mathcal{L}(u(t)e^{z_0 t})(z) = U(z - z_0)$$

en donde $t_0 \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ son números fijos.

- (a) La prueba consiste nada más que en un cambio de variable en una integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} u(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(t+t_0)} u(t) dt = e^{-zt_0} U(z),$$

- (b) Aquí sólo reescribimos el integrando:

$$U(z - z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-(z-z_0)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (u(t) e^{z_0 t}) e^{-zt} dt.$$

4. (Linealidad de la transformada de Laplace). Si $U = \mathcal{L}(u)$ y Si $V = \mathcal{L}(v)$ entonces

$$\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}(u) + \beta \mathcal{L}(v) = \alpha U + \beta V$$

para todo par de números complejos α y β . La prueba es inmediata y depende sólo de la propiedad de linealidad de la integral.

5. (Convolución en el tiempo). Aquí comenzamos con el siguiente

Lema 5.1 Sean u y v dos funciones causales y de crecimiento exponencial. Entonces la convolución de $u * v$ también es causal y de crecimiento exponencial.

En efecto, podemos encontrar constantes no negativas a , k y σ tales que para todo t , $|u(t)| < k H(t - a) e^{\sigma t}$ y $|v(t)| < k H(t - a) e^{\sigma t}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} |u * v(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} k H(t+a-s) e^{\sigma(t-s)} k H(s-a) e^{\sigma s} ds \\ &= k^2 H(t-2a) e^{\sigma t} \int_a^{t-a} ds \\ &\leq k^2 (t-2a) e^{\sigma t} \end{aligned}$$

(para pasar de la primera línea a la segunda, véase la ecuación 4.4). Pero, para todo t ocurre $t-2a < e^{t-2a}$. Por tanto

$$|u * v(t)| \leq k^2 e^{-2a} e^{(1+\sigma)t}$$

y esto termina la demostración del lema.

Si $u(t)$ y $v(t)$ tienen transformadas de Laplace $U(z)$ y $V(z)$ respectivamente, entonces la convolución de estas funciones $(u * v)(t)$ tiene como transformada de Laplace el producto $U(z)V(z)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u * v)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x-s)v(s) ds) e^{-zx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(s) e^{-z(s+t)} ds dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-zt} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(s) e^{-zs} ds \right) \\ &= U(z)V(z). \end{aligned}$$

(Aquí por cierto, intervino el teorema de Fubini en una integral doble absolutamente convergente.)

Podemos resumir las propiedades (ó teoremas operacionales) de la transformada de Laplace en la siguiente tabla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(t))(z) &= U(z) \\ \mathcal{L}(u'_{\text{gen}}(t))(z) &= zU(z) \\ \mathcal{L}(tu(t))(z) &= -U'(z) \\ \mathcal{L}(u(t-t_0))(z) &= U(z)e^{-zt_0} \\ \mathcal{L}(e^{z_0 t}u(t))(z) &= U(z-z_0) \\ \mathcal{L}(\alpha u(t) + \beta v(t))(z) &= \alpha U(z) + \beta V(z) \\ \mathcal{L}((u * v)(t))(z) &= U(z)V(z) \end{aligned}$$

Para el caso en que u y v son funciones generalizadas, podemos suponer que $u = (d/dt)_{\text{gen}}^{(m)} f$ y que $v = (d/dt)_{\text{gen}}^{(n)} g$ donde f y g son funciones causales de crecimiento exponencial. Usando la propiedad de la transformada de las derivadas generalizadas tenemos que $U(z) = z^m F(z)$ y $V(z) = z^n G(z)$. En particular, tenemos que la transformada de la convolución de u con v es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u * v)(z) &= \mathcal{L}\left((d/dt)_{\text{gen}}^{(m)} f * (d/dt)_{\text{gen}}^{(n)} g\right)(z) = \mathcal{L}\left((d/dt)_{\text{gen}}^{(m+n)}(f * g)\right)(z) \\ &= z^{(m+n)} F(z)G(z) = U(z)V(z)\end{aligned}$$

Usando estas reglas podemos deducir la TL de las funciones en los ejemplos anteriores a partir del sólo hecho de que la transformada de $H(t)$ es $1/z$.

Ejemplo 7 Dos maneras de calcular la transformada de Laplace de la función rampa $u(t) = t H(t)$.

- Usando $(t H(t))'_{\text{gen}} = H(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u'_{\text{gen}}(t))(z) &= zU(z) \\ \mathcal{L}(H(t))(z) &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $zU(z) = 1/z$ y se obtiene que la TL de $tH(t)$ es $1/z^2$.

- Por otro lado si vemos la función rampa como la convolución $H(t) * H(t)$, y aplicamos el Teorema de la convolución obtenemos

$$\mathcal{L}(H * H)(z) = \mathcal{L}(H)(z) \mathcal{L}(H)(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Ejemplo 8 Calcular la transformada de Laplace de la función $u(t) = H(t) \text{sen}(\omega t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(t))(z) &= \mathcal{L}(H(t) \text{sen}(\omega t))(z) \\ &= \mathcal{L}\left(H(t) \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)(z) \\ &= \frac{1}{2i} \mathcal{L}(H(t)e^{i\omega t})(z) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}(H(t)e^{-i\omega t})(z) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z + i\omega} \\ &= \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

5.4 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Son muchas las aplicaciones de la transformada de Laplace. En particular, es útil para el cálculo de la convolución de funciones. Pero su potencia va a quedar evidenciada en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 9 Calcular la convolución $p * p$ donde $p(t) = 1$ si $0 < t < 1$ y $p(t) = 0$ en otro caso. La transformada de Laplace de p es

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-zt} dt = \int_0^1 e^{-zt} dt = \frac{1}{z}(1 - e^{-z})$$

Por tanto, la transformada de Laplace de $p * p$ es

$$P^2(z) = \frac{1}{z^2}(1 - 2e^{-z} + e^{-2z})$$

Usando los teoremas operacionales se sigue que

$$(p * p)(t) = tH(t) - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2).$$

(Compare este resultado con el que obtuvo en el ejercicio 5 del capítulo 4.)

Ejemplo 10 Calcular el propagador causal G del operador $L = \frac{d}{dt} + a\mathbb{I}$. Este propagador satisface

$$\frac{dG(t)}{dt_{\text{gen}}} + aG(t) = \delta(t).$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$z\mathcal{G}(z) + a\mathcal{G}(z) = (z+a)\mathcal{G}(z) = 1,$$

donde \mathcal{G} es la transformada de Laplace de G . Se sigue que $\mathcal{G}(z) = 1/(z+a)$. Usando los teoremas operacionales obtenemos que $G(t) = H(t)e^{-at}$. Este ejemplo confirma lo que habíamos obtenido en el ejercicio 5 del capítulo 3.

En lo sucesivo a la transformada de Laplace del propagador causal de un operador lo llamaremos *la función de transferencia* del operador.

Ejemplo 11 Propagador causal para el oscilador armónico amortiguado. Para motivar el problema, considere la figura 5.1. La masa m está obligada a moverse en línea recta. La misma está sometida a las fuerzas ejercidas por el émbolo e , el resorte K y la resistencia al movimiento causada por el entorno en el cual la masa se mueve. Denotemos con $x(t)$ el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de equilibrio. Si los desplazamientos no son muy grandes, asumir que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es proporcional al desplazamiento es una buena aproximación a la realidad. La fuerza de resistencia del medio al movimiento, suele modelarse suponiendo que esta fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. De modo que la ecuación diferencial que satisface el desplazamiento está dada por

$$mx''(t) = -\rho x'(t) - kx(t) + f(t), \quad (5.2)$$

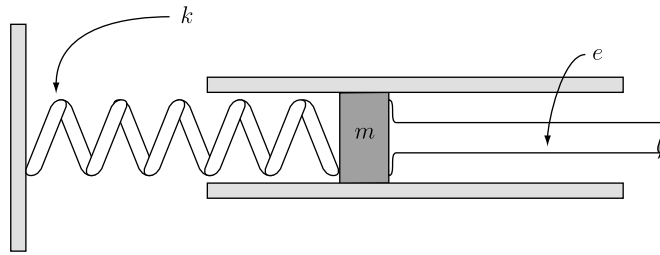


Figura 5.1

donde ρ y k son las constantes de proporcionalidad (no negativas) que permiten expresar las fuerzas de resistencia del medio y la del resorte en términos de la velocidad y el desplazamiento respectivamente. $f(t)$ es la fuerza que ejerce el émbolo sobre la masa. Sean $2\gamma = \rho/m$, $\omega_0^2 = k/m$ y $a(t) = f(t)/m$. Entonces la ecuación 5.2 la podemos reexpresar como

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = a(t)$$

Queremos hallar el propagador causal G para el operador $L = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \mathbb{I}$. Procedemos igual que en el ejemplo anterior. En la ecuación

$$G''(t) + 2\gamma G'(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t),$$

tomamos transformadas de Laplace en ambos lados:

$$z^2 \mathcal{G}(z) + 2\gamma z \mathcal{G}(z) + \omega_0^2 \mathcal{G}(z) = 1.$$

Se sigue que

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2}.$$

Para hallar $G(t)$ usando los teoremas operacionales, vamos a emplear fracciones simples. Aquí se pueden presentar tres casos:

1. $\gamma^2 \neq \omega_0^2$. En este caso, las raíces del polinomio $z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2$, $\alpha = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ y $\beta = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ son distintas.

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right)$$

Usando los teoremas operacionales encontramos que

$$G(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} (H(t) e^{\alpha t} - H(t) e^{\beta t}) = \frac{H(t)}{\alpha - \beta} (e^{\alpha t} - e^{\beta t})$$

- (a) Si $\gamma > \omega_0$ podemos definir $\gamma_\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ de modo que $\alpha - \beta = 2\gamma_\omega$ y

$$G(t) = \frac{H(t)}{2\gamma_\omega} (e^{(-\gamma+\gamma_\omega)t} - e^{(-\gamma-\gamma_\omega)t}) = \frac{H(t) e^{-\gamma t}}{\gamma_\omega} \sinh(\gamma_\omega t).$$

En este caso se dice que el movimiento es sobreamortiguado. La masa m no oscila en torno al punto de reposo. La masa parte del reposo y vuelve lentamente a él.

- (b) Si $\gamma < \omega_0$ podemos definir $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ de modo que $\alpha - \beta = 2i\omega_\gamma$ y

$$G(t) = \frac{H(t)}{2i\omega_\gamma} (e^{(-\gamma+i\omega_\gamma)t} - e^{(-\gamma-i\omega_\gamma)t}) = \frac{H(t) e^{-\gamma t}}{\omega_\gamma} \text{sen}(\omega_\gamma t).$$

En este caso se dice que el movimiento es subamortiguado. La masa m oscila en torno al punto de reposo pero la amplitud de las oscilaciones queda gobernada por la función $e^{-\gamma t}$.

2. $\gamma^2 = \omega_0^2$. En este caso, el polinomio $z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2$, tiene una raíz doble $\alpha = -\gamma$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{(z + \gamma)^2}$$

Ahora bien, $\mathcal{G}(z) = U(z + \gamma)$ donde $U(z) = 1/z^2$. Hemos visto que U es la transformada de la función $u(t) = H(t)t$. De modo que los teoremas operacionales nos dicen que

$$G(t) = H(t) t e^{-\gamma t}.$$

En este caso se dice que el movimiento es críticamente amortiguado. El comportamiento del movimiento de la masa es parecido al del movimiento subamortiguado. Sin embargo esta situación (movimiento críticamente amortiguado) no se presenta en la práctica.

Ejemplo 12 Resolver la ecuación

$$m x''(t) + \rho x'(t) + k x(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $x(t)$ satisface $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$. Aquí procedemos como en la sección 4.3. Definamos $u(t) = H(t)x(t)$. Usando la notación del ejemplo anterior tenemos que u satisface

$$u''_{\text{gen}}(t) + 2\gamma u'_{\text{gen}}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{\delta(t)}{m} + a_0 H(t) \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $a_0 = F_0/m$. Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación, y despejando $U(z)$ encontramos

$$U(z) = \frac{1/m}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2} + \frac{\omega a_0}{(z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2)(z^2 + \omega^2)}.$$

El primer sumando lo reconocemos como el propagador causal dividido entre m del operador $L = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \mathbb{I}$. La dificultad aquí reside en encontrar la función causal cuya transformada de Laplace genera el segundo sumando. Si bien es cierto que podemos recurrir al método de las fracciones simples, observamos que el grado del polinomio del denominador es de orden cuatro. Usar fracciones simples demandaría la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Vamos a desarrollar técnicas más idóneas para resolver este tipo de situaciones en el próximo capítulo: transformada inversa de Laplace.

Ejercicios

1. Sean u una función causal, de crecimiento exponencial y U la Transformada de Laplace (TL) de u . Muestre que la TL de $H * u$ es $U(z)/z$
2. Calcule la TL de $H(t) \cos(\omega t)$. (Este cálculo debería llevarle sólo tres líneas.)
3. Calcule la TL de $H(t) \sinh(\omega t)$ y la de $H(t) \cosh(\omega t)$
4. En este ejercicio y el que le sigue supongamos que $u(t)$ es una función causal de crecimiento exponencial y que $U(z)$ es su transformada de Laplace. Calcule la TL de $t e^{z_0 t} u(t)$ en términos de U
5. Calcule la TL de $t u(t - t_0)$ y de $(t - t_0) u(t - t_0)$ en términos de U .
6. Resuelva $f'(t) = f(t)$, $f(0) = c_0$ usando TL.

7. Usando TL resuelva

$$f''(t) + f(t) = 0$$

y

$$f''(t) - f(t) = 0,$$

donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ en ambos casos. Dibuje los gráficos de cada una de las soluciones. (Sugerencia: use los resultados obtenidos en los ejercicios 2 y 3.)

8. Encuentre la función causal u que satisface

$$\frac{d^2 u}{dt_{\text{gen}}^2}(t) + \omega^2 u(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Haga un gráfico de $u(t)$.

9. El operador

$$L = -\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2} + 18\mathbb{I},$$

aparece cuando se estudia el movimiento de electrones en un medio transparente cuando están sometidos a la acción de campos electromagnéticos. Encuentre la función de transferencia de este operador.

Capítulo 6

Transformada Inversa de Laplace

El propósito de este capítulo es estudiar bajo qué circunstancias, una función de una variable compleja $U(z)$ es la transformada de Laplace de una función una variable real $u(t)$. Para motivar la discusión, vamos a reconsiderar el método de las fracciones simples para hallar la función $u(t)$, cuando $U(z)$ es una función racional.

6.1 Fracciones simples

Sea $R(z)$ una función racional dada por

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n} \quad (6.1)$$

Supongamos que el denominador tiene p raíces distintas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ que se presentan con multiplicidades N_1, N_2, \dots, N_p , esto es:

$$b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n = b_0 (z - \alpha_1)^{N_1} (z - \alpha_2)^{N_2} \cdots (z - \alpha_p)^{N_p}.$$

Los enteros N_j cumplen $N_1 + N_2 + \cdots + N_p = n$. El teorema de la descomposición de funciones racionales en fracciones simples nos dice que $R(z)$ puede escribirse como

$$R(z) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k z^k + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{c_{1k}}{(z - \alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{c_{2k}}{(z - \alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_{pk}}{(z - \alpha_p)^k}.$$

Para hallar las constantes c_k se puede usar el algoritmo de la división larga de polinomios. Para hallar los c_{jk} es necesario resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Usando la siguiente tabla de transformadas

$u(t)$	$U(z)$
$H(t)$	$\frac{1}{z}$
$H(t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$
$H(t)e^{\alpha t}$	$\frac{1}{z - \alpha}$
$H(t)e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(z - \alpha)^k}$
$\delta(t)$	1
$(d/dt)_{\text{gen}}^k \delta(t)$	z^k

no es difícil encontrar una función $r(t)$ cuya transformada de Laplace es $R(z)$.

Ejemplo 1 La función racional

$$F(z) = \frac{3z^3 - 2z^2 + 2z - 2}{z^3 - z^2},$$

se descompone en

$$F(z) = 3 + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z-1}.$$

De la tabla encontramos que la función

$$f(t) = 3\delta(t) + 2H(t)t + H(t)e^t,$$

tiene a la función $F(z)$ por transformada de Laplace.

Como ya se ha mencionado, encontrar los coeficientes c_{jk} es engorroso si el grado del polinomio del denominador n es grande. Afortunadamente, existe otro camino que presentamos a continuación.

6.2 Método de los residuos

Para ver como funciona este método reconsideremos la función $R(z)$ y concentremos nuestra atención en el j -ésimo sumando. Este sumando

$$R_j(z) = \sum_{k=1}^{N_j} \frac{c_{jk}}{(z - \alpha_j)^k},$$

proviene de la transformada de Laplace de

$$r_j(t) = H(t)v_j(t) = H(t) \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk} e^{\alpha_j t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Para justificar como nace la función v_j podemos considerar la función

$$e^{tz} = 1 + tz + \frac{t^2}{2}z^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}z^{k-1} + \cdots.$$

La serie (de Laurent) en torno a $z = 0$ de e^{tz}/z^k es

$$\frac{e^{tz}}{z^k} = \frac{1}{z^k} + \frac{t}{z^{k-1}} + \frac{t^2}{2z^{k-2}} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!z} + \cdots$$

De modo que

$$\begin{aligned} \frac{e^{tz}}{(z - \alpha_j)^k} &= e^{\alpha_j t} \frac{e^{t(z - \alpha_j)}}{(z - \alpha_j)^k} \\ &= e^{\alpha_j t} \left(\frac{1}{(z - \alpha_j)^k} + \frac{t}{(z - \alpha_j)^{k-1}} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!(z - \alpha_j)} + \cdots \right). \end{aligned}$$

El término que queremos extraer de esta serie, $e^{\alpha_j t} t^{k-1}/(k-1)!$ es justamente el residuo¹ de la función $e^{tz}/(z - \alpha_j)^k$ en el punto $z = \alpha_j$:

$$e^{\alpha_j t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \text{Res} \left(\frac{e^{tz}}{(z - \alpha_j)^k}; \alpha_j \right).$$

¹Para el cálculo de residuos véase Elementos de Variable Compleja

Usando las propiedades del residuo tenemos que

$$\begin{aligned} v_j(t) &= \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk} e^{\alpha_j t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{N_j} \text{Res} \left(e^{tz} \frac{c_{jk}}{(z - \alpha_j)^k}; \alpha_j \right) \\ &= \text{Res} \left(e^{tz} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{c_{jk}}{(z - \alpha_j)^k}; \alpha_j \right) = \text{Res} (e^{tz} R_j(z); \alpha_j). \end{aligned}$$

Más aún, como $\text{Res} (R_i(z); \alpha_j) = 0$ para $i \neq j$, tenemos que

$$\begin{aligned} v_j(t) &= \text{Res} (e^{tz} R_0(z); \alpha_j) + \text{Res} (e^{tz} R_1(z); \alpha_j) + \cdots + \text{Res} (e^{tz} R_p(z); \alpha_j) \\ &= \text{Res} (e^{tz} R(z); \alpha_j). \end{aligned}$$

Así, para obtener la función r_j sólo tenemos que calcular un residuo. La función $r(t)$ que tiene a $R(z)$ como transformada de Laplace la podemos escribir como

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=0}^{N_0} c_k \delta^{(k)}(t) + H(t) \sum_{j=1}^p v_j(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N_0} c_k \delta^{(k)}(t) + H(t) \sum_{j=1}^p \text{Res} (e^{tz} R(z); \alpha_j) \quad 6.2 \quad (6.2) \end{aligned}$$

Para finalizar esta con esta línea de argumentación, queremos observar que la expresión en la ecuación se puede simplificar ligeramente usando el hecho de que cuando $\alpha \neq \alpha_j$ ($j = 1, \dots, p$) entonces $\text{Res} (e^{tz} R(z); \alpha) = 0$. De manera que

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k \delta^{(k)}(t) + H(t) \sum_{\alpha \in \mathbb{C}} \text{Res} (e^{tz} R(z); \alpha) \quad (6.3)$$

Ejemplo 2 Consideremos la función racional

$$R(z) = \frac{70z - 63z^2 + 19z^3 - 2z^4}{36 - 33z + 10z^2 - z^3}. \quad (6.4)$$

Usando la división de polinomios podemos reescribir a R como

$$R(z) = 1 + 2z - \frac{36 - 31z + 7z^2}{36 - 33z + 10z^2 - z^3}.$$

Las raíces del polinomio del denominador son $\alpha_1 = 3$ (raíz doble) y $\alpha_2 = 4$ (raíz simple) y los residuos de $e^{tz}R(z)$ son

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \operatorname{Res}(e^{tz}R(z); \alpha_1) = -(17 + 6t)e^{3t}, \\v_2(t) &= \operatorname{Res}(e^{tz}R(z); \alpha_2) = 24e^{4t}.\end{aligned}$$

De modo que la función

$$r(t) = \delta(t) + 2\delta'(t) - H(t)(17e^{3t} + 6te^{3t} - 24e^{4t}),$$

tiene por transformada de Laplace a la función $R(z)$. Para verificar que este resultado es correcto uno puede tomar transformada de Laplace al último resultado para obtener

$$R(z) = 1 + 2z - \frac{17}{z-3} - \frac{6}{(z-3)^2} + \frac{24}{z-4}.$$

Este es justamente el desarrollo en fracciones simples de la función R . Se deja al lector hacer las manipulaciones algebraicas necesarias para reescribir $R(z)$ como en la ecuación 6.4.

Ejemplo 3 Encontrar una función $u(t)$ cuya transformada de Laplace es

$$U(z) = \frac{e^{-3z}}{z - z^2}.$$

En este caso, la función U no es una función racional y todo lo que hemos dicho anteriormente, no se aplica. Sin embargo, no todo está perdido, podemos escribir la función $U(z)$ como $e^{-3z}R(z)$ donde $R(z) = 1/(z - z^2)$ si es una función racional y usar los teoremas operacionales del capítulo anterior para resolver el problema. El denominador de R tiene dos raíces simples $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 1$. Los residuos de $e^{tz}R(z)$ α_1 y α_2 son 1 y $-e^t$ respectivamente. De manera que $R(z)$ es la transformada de Laplace de $r(t) = H(t)(1 - e^t)$. Los teoremas operacionales nos dicen que la función $U(z)$ es la transformada de Laplace de

$$H(t-3)(1 - e^{t-3})$$

6.3 Transformada Inversa de Laplace

Hemos visto que cualquier función racional $R(z)$ es la transformada de Laplace de una función $r(t)$ que es de la forma

$$r(t) = \sum_{k=1}^{N_0} c_k \frac{d^k \delta}{dt^k}(t) + H(t) v(t)$$

donde $v(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{C}} \text{Res}(e^{tz} R(z); \alpha)$.

Cuando el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador en la función $R(z)$ ($n > m$ en la ecuación 6.1), todos los $c_k = 0$ y $R(z)$ es nada más que la transformada de Laplace de $H(t)v(t)$.

La presencia de residuos en los cálculos anteriores sugiere la incorporación de integrales complejas en la discusión. En particular, si en la ecuación 6.1 $\{\alpha_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, p$, son los polos de la función racional $R(z)$ (o equivalentemente, las raíces del polinomio del denominador) y $\rho > 0$ es tal que $\forall j, |\alpha_j| < \rho$ entonces

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} e^{tz} R(z) dz.$$

De manera que uno puede calcular la función $v(t)$ usando solamente los valores de $R(z)$ cuando $|z|$ es lo suficientemente grande.

Supongamos ahora que en la ecuación 6.1 $n \geq m + 2$. Esto significa que $|R(z)| \leq c/|z|^2$ cuando $|z|$ es grande. Si σ es un número real, tal que la línea vertical $\{z | \text{Re } z = \sigma\}$ no pasa por ninguno de los polos de $R(z)$, entonces ocurre que para ω lo suficientemente grande $|R(\sigma + i\omega)| \leq c/\omega^2$ y la integral

$$I(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{tz} R(z) dz$$

converge absolutamente. Para $\sigma \geq \rho$ la integración a lo largo del camino circular $|z| = \rho$ se puede reemplazar por integraciones a lo largo de las líneas verticales $\text{Re } z = \pm\sigma$, obteniendo

$$v(t) = I(\sigma, t) - I(-\sigma, t)$$

válido por todo $t \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq \rho$. Esta fórmula no incluye todavía la función de Heaviside pues la función $v(t)$ por si misma no se anula para valores

negativos de t . Sin embargo, los dos términos, $I(\sigma, t)$ e $I(-\sigma, t)$ cuando se toman por separado, se anulan en $t \leq 0$ y en $t \geq 0$ respectivamente. He aquí el argumento de por qué esto debe ser así.

Supongamos que $|R(z)| \leq C/|z|^2$ cuando $|z| > K$. Entonces $|e^{tz}R(z)| \leq Ce^{t\sigma}/(\sigma^2 + \omega^2)$ cuando $z = \sigma + i\omega$, con $\sigma < -K$ o $\sigma > K$. Por lo tanto,

$$|I(\sigma, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{e^{t\sigma}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \leq \frac{C}{2|\sigma|} e^{t\sigma}.$$

Cuando $t \leq 0$ tenemos que $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} I(\sigma, t) = 0$ porque $|I(\sigma, t)| < Ce^{t\sigma}/(2\sigma)$. Pero por el teorema de Cauchy para integrales complejas, el valor numérico de $I(\sigma, t)$ es independiente de σ en el intervalo $K < \sigma < \infty$. Consecuentemente, $t \leq 0$ implica $I(\sigma, t) = 0$. De la misma manera, $I(-\sigma, t) = 0$ cuando $t \geq 0$ porque $|I(-\sigma, t)| \leq Ce^{-t\sigma}/2\sigma$ y $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} I(-\sigma, t) = 0$. En consecuencia, $v(t) = I(\sigma, t)$ cuando $t \geq 0$, mientras que en $t < 0$ $I(\sigma, t) = 0$. De esta manera, el factor de Heaviside que faltaba queda efectivamente incorporado usando solamente $I(\sigma, t)$, con $\sigma \gg 0$.

En general cuando $F(z)$ es una función analítica en un semiplano $\operatorname{Re} z > \sigma_0$ uno puede definir formalmente una *transformada inversa de Laplace* mediante la fórmula integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(z) e^{tz} dz, \quad (6.5)$$

en donde $\sigma > \sigma_0$.

Hemos visto que cuando $F(z)$ es una función racional y satisface $|F(z)| < c/|z|^2$ para $|z|$ grande, la integral 6.5 converge absolutamente. Esta integral produce precisamente una función $f(t) = H(t)v(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(z)$.

En principio, la fórmula integral para la transformada inversa de Laplace puede aplicarse con mayor generalidad que el método de residuos porque sólo requiere el conocimiento de $F(\sigma + i\omega)$ a lo largo de una sola línea vertical. El método de residuos, por otra parte, parece ser el método natural cuando F es racional.

La reciprocidad de las fórmulas integrales para la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace es válida en situaciones muy generales y la correspondencia $u(t) \leftrightarrow U(z)$ es uno a uno. Un primer paso en esta dirección es mostrar que dos funciones continuas distintas $u_1(t)$ y $u_2(t)$

no pueden tener la misma transformada de Laplace. Naturalmente esto es equivalente a decir que una función continua $u(t)$ que no sea idénticamente igual a cero no puede tener Transformada de Laplace idénticamente igual a cero.

Teorema 6.1 Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, con $u(t) = 0$ en algún intervalo $-\infty < t < t_0$ y $|u(t)| \leq Ce^{\sigma_0 t}$ para todo t , donde $C > 0$ y $\sigma_0 > 0$ son constantes dadas. La Transformada de Laplace $U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt} dt$ está bien definida y es analítica siempre que z cumpla $\operatorname{Re} z > \sigma_0$. Si $U(z) = 0$ para todo z con $\operatorname{Re}(z) > \sigma_0$, entonces $u(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para $\operatorname{Re} z > \sigma_0$ tenemos que

$$\frac{dU}{dz}(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-zt} dt$$

(véase el segundo teorema operacional en el capítulo anterior). Así U es derivable en el semiplano $\operatorname{Re} z > \sigma_0$ y por tanto analítica en esta región. (Recordemos que si una función $V : A \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en A , donde A es un subconjunto abierto de \mathbb{C} , entonces V es analítica en A .)

Supongamos ahora que $U(z)$ es idénticamente igual a cero. Para demostrar que $u(t) = 0$ primero vamos a demostrar el siguiente

Lema 6.1 La convolución de $u(t)$ con la función rampa $r(t) = H(t)t$ es idénticamente igual a cero.

La función rampa $r(t) = H(t)t$ tiene por transformada de Laplace la función racional $1/z^2$. Para tales funciones racionales, hemos visto que la fórmula integral 6.5 recupera la función dependiente de t :

$$r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tz} \frac{1}{z^2} dz$$

donde $\sigma > 0$. Calculemos la convolución de $u(t)$ con $r(t)$. Por definición,

$$(r * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-s)u(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(t-s)z} \frac{1}{z^2} dz \right) u(s)ds.$$

El valor absoluto del integrando es

$$|u(s)| e^{-s\sigma} e^{t\sigma} \frac{1}{\sigma^2 + \omega^2}.$$

Si tomamos $\sigma > \sigma_0$, la doble integral sobre $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \omega < \infty$ converge, por lo que podemos intercambiar el orden de integración, resultando así que

$$\begin{aligned}(r * u)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tz} \frac{1}{z^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(s) e^{-sz} ds \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2} U(z) dz\end{aligned}$$

Pero $U(z)$ es idénticamente igual a cero. Por tanto, $r * u = 0$ para todos los valores de t .

Ahora es fácil ver que la función u misma se anula para todo tiempo t . En efecto, observemos que la segunda derivada generalizada de la función rampa es la función delta de Dirac, de manera que

$$(r * u)''_{\text{gen}}(t) = (r''_{\text{gen}} * u)(t) = (\delta * u)(t) = u(t) = 0.$$

Como u es continua, entonces u es idénticamente nula. Esto concluye la demostración.

Observación: El teorema también vale para funciones causales más generales $v(t)$. De hecho, podemos pasar de v a $u = v * H * \cdots * H$. Alguna iteración de la convolución con la función de Heaviside produce una función continua u para la cual el teorema se aplica. Pero, por los teoremas operacionales, $U(z) = 0$ si y sólo si $V(z) = 0$. Finalmente, $v(t)$ se anula porque es una derivada generalizada iterada de la función $u(t)$ donde, por el teorema, $u(t) = 0$.

Podemos preguntarnos ahora, ¿qué tipo de funciones analíticas pueden aparecer como transformadas de funciones $u(t)$? He aquí una respuesta parcial a esta pregunta.

Teorema 6.2 *Sea $U(z)$ una función analítica acotada en el semiplano $\text{Re } z > 0$. Entonces $U(z)$ es la transformada de Laplace de alguna función generalizada $u(t)$. De hecho, u puede representarse como $u(t) = v''_{\text{gen}}(t)$, donde $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, $v(t) = 0$ para $t < 0$, y $|v(t)|$ es de crecimiento exponencial en $0 < t$.*

Demostración. De los teoremas operacionales resulta natural proponer a $v(t)$ como la transformada de Laplace inversa de $U(z)/z^2$. Por hipótesis, $|U(z)| \leq M < \infty$ para todo z con $\operatorname{Re} z = \sigma > 0$. Entonces,

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tz} \frac{U(z)}{z^2}$$

para cualquier $\sigma > 0$. El valor absoluto de v está acotado por

$$|v(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma} \frac{M}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \leq \frac{M}{2\sigma} e^{t\sigma}$$

Cuando $t < 0$ tenemos $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} M e^{t\sigma} / (2\sigma) = 0$. Pero el valor numérico de $v(t)$ es independiente de $\sigma > 0$. Por tanto, $v(t) = 0$ para $t \leq 0$.

Para cualquier $\sigma > 0$, $v(t)$ satisface una desigualdad de la forma $|v(t)| \leq C e^{t\sigma}$ para todo t . Por tanto, $v(t)$ crece exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$ pero σ lo podemos elegir arbitrariamente pequeño. Por tanto, $v(t)$ tiene un crecimiento exponencial lento.

Finalmente, $v(t)$ es una función continua. Para probar $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0)$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ uno intercambia el orden entre el límite y la integral usando $\lim_{t \rightarrow t_0} e^{tz} = e^{t_0 z}$ válido para todo $z \in \mathbb{C}$. El teorema de la convergencia dominada se aplica en este caso porque la función $e^{tz} U(z)/z^2$ está acotada por una función L^1 de la forma $C/(\sigma^2 + \omega^2)$ cuando t varía en el intervalo $t_0 - 1 < t < t_0 + 1$. Los argumentos hasta aquí expuestos, muestran que $v(t)$ tiene una transformada de Laplace

$$V(w) = \int_0^{\infty} v(t) e^{-tw} dt$$

El débil crecimiento exponencial de $v(t)$ garantiza que esta integral converge absolutamente siempre que $\operatorname{Re} w > 0$.

Queremos mostrar ahora que $V(w) = U(w)/w^2$. Dado w , con $\operatorname{Re} w > 0$, escogamos σ de forma tal que $0 < \sigma < \operatorname{Re} w$. Entonces

$$V(w) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tz} \frac{U(z)}{z^2} dz \right) e^{-tw} dt$$

Observemos que

$$\left| e^{tz} \frac{U(z)}{z^2} e^{-tw} \right| \leq \frac{M}{\sigma^2 + \omega^2} e^{-t(\operatorname{Re} w - \sigma)}$$

cuya integral doble sobre $-\infty < \omega < \infty$, $0 < t < \infty$ es finita. Por tanto, el orden de integración puede intercambiarse resultando,

$$V(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{w-z} \frac{U(z)}{z^2} dz.$$

Ahora bien, $U(z)/(z^2(w-z)) \leq C/|z|^3$ a medida que $|z| \rightarrow \infty$ en el semiplano derecho. Esto significa que podemos escribir $V(w)$ como una integral de contorno

$$V(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{1}{w-z} \frac{U(z)}{z^2} dz$$

donde Γ_ρ aparece en la Figura 6.1.

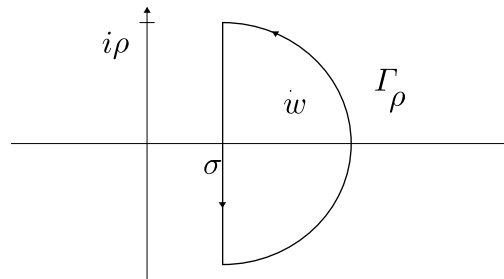


Figura 6.1

La integral sobre la parte circular de Γ_ρ tiende a cero cuando R tiende a infinito, mientras que la integral a lo largo del segmento vertical tiende a la integral que define la transformada inversa de Laplace del integrando. Este integrando, visto como función de z , tiene un polo simple en $z = w$. El teorema de los residuos nos permite evaluar esta integral de inmediato arrojando $V(w) = U(w)/w^2$. Así, $v(t)$ tiene a $U(z)/z^2$ como su transformada de Laplace, y por lo tanto, $v''_{\text{gen}}(t)$ tiene a $U(z)$ como su transformada de Laplace. Esto completa la prueba.

Para terminar esta sección queremos mencionar lo siguiente: Puede ocurrir que una función analítica dada, $F(z)$, no sea acotada en $\text{Re } z > 0$. Sin embargo podemos examinar

$$U(z) = F(z+a) \frac{e^{-bz}}{(z+a)^m}$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y m es un entero positivo. Si $U(z)$ está definida en $\text{Re } z > 0$ y es acotada en esta región, podemos encontrar $u(t)$ y entonces, usando teoremas operacionales, hallar $f(t)$.

Por otro lado, si vamos más allá de las funciones racionales y consideramos, por ejemplo,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

la fórmula de residuos no se puede aplicar. Pero la fórmula integral de la transformada inversa de Laplace sigue siendo válida, y resulta en este caso que la TLI es $u(t) = H(t)J_0(t)$, donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero.

Ejercicios

1. Una cierta función racional $R(z)$ cumple $|R(z)| < \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z \geq 0$. Además, $R(z)$ es la TL de $u(t)$. Verifique que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$.

2. La función racional

$$F(z) = \frac{z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6}{z^2 + z + 2}$$

no satisface $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$. Halle un polinomio $P(z) = az^2 + bz + c$ de manera que $\lim_{z \rightarrow \infty} (F(z) - P(z)) = 0$.

3. Suponemos $F(z)$ racional con $F(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deduzca que $F(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. A partir de $U(z)$ racional se construye otra función racional así: $V(z) = \overline{U(\bar{z})}$. ¿Cómo están relacionadas las TLI $u(t)$ y $v(t)$?

5. Calcule la TLI de $\frac{4z^3}{z^4 - 1}$.

6. Como la función $F(z) = e^{-2z} \left(\frac{1+2z}{z^2} \right)$ es acotada sin polos en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, ella tiene que ser la TL de alguna función $u(t)$. Determine $u(t)$, usando teoremas operacionales.

7. La función de Bessel $J_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisface la cota $|J_0(t)| \leq 1$, para todo t , y la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} t\ddot{J}_0(t) + \dot{J}_0(t) + tJ_0(t) &= 0 \\ J_0(0) &= 1, \quad \dot{J}_0(0) = 0. \end{aligned}$$

Póngase $u(t) = H(t)J_0(t)$.

(a) Compruebe que

$$t\ddot{u}_{\text{gen}}(t) + \dot{u}_{\text{gen}}(t) + tu(t) = 0 .$$

(b) Sea $F(z)$ la TL de $u(t)$. Compruebe que $(1+z^2)F'(z) + zF(z) = 0$.

(c) Deduzca que $F(z)$ tiene la forma $\frac{\text{const}}{\sqrt{1+z^2}}$.

8. Utilice el teorema que relaciona la TL con la convolución para deducir la identidad

$$\text{sen } t = \int_0^t J_0(s)J_0(t-s) ds$$

válida para $t \geq 0$.

Capítulo 7

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

El tema central de Matemáticas VII es la aplicación de la teoría de Fourier en la búsqueda de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales y no la teoría de Fourier por si misma. En este capítulo vamos a ofrecer algunos comentarios a manera de introducción a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EPD).

7.1 Ecuaciones en derivadas parciales

Una solución de una EDP es una función escalar $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ definida en algún subconjunto abierto de \mathbb{R}^m . La ecuación diferencial misma involucra a la función u junto con algunas de sus derivadas parciales $u_{x_i}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} u$. Usualmente estas ecuaciones se deducen de alguna ley de conservación de la física. El orden de una ecuación diferencial se define como el mayor orden de las derivadas parciales de u que en ella aparecen.

Sobre ecuaciones en derivadas parciales podemos aprender bastante, si entendemos la ecuación sencilla

$$au_x + bu_y = 0 \tag{7.1}$$

donde a y b son constantes reales y la incógnita $u(x, y)$ es una función definida en el plano; también puede llamarse *campo escalar*. Esta es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes.

Esta ecuación puede interpretarse geoméricamente y sus soluciones son funciones que son constantes a lo largo de rectas de pendiente b/a , suponiendo $a \neq 0$. Para verificar este hecho, calculemos la derivada respecto a t de la función $g(t) = u((x, y) + t(a, b)) = u(x + ta, y + tb)$. Como u satisface la ecuación 7.1, obtenemos

$$g'(t) = u_x a + u_y b = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para cada (x, y) fijo. De manera que $g(t) = \text{const.}$ y por lo tanto, $u(x, y)$ es constante a lo largo de la recta $(x, y) + t(a, b)$. En particular, como $u(x, y) = u(x + ta, y + tb)$ para todo (x, y) y t , tomando $t = -y/b$ (siempre y cuando $b \neq 0$) obtenemos que $u(x, y) = u(x - ay/b, 0)$. Esto nos muestra que el valor de u en cualquier punto puede ser encontrado a partir de sus valores en el eje x . Recíprocamente, dada cualquier función $\phi(s)$ de una sola variable, podemos construir la función $u(x, y) = \phi(bx - ay)$ y luego verificar que esta función cumple con la ecuación $au_x + bu_y = 0$.

Cabe destacar los siguientes puntos:

1. La ecuación $au_x + bu_y = 0$ tiene una infinidad de soluciones, al menos tantas como funciones derivables de una sola variable $\phi(s)$.
2. Si la ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) $au_x + bu_y = 0$ se combina con una condición de frontera tal como $u(x, 0) = f(x)$, el problema tiene una única solución. Por ejemplo, la ecuación $u_x + 2u_y = 0$, junto con la condición de frontera $u(x, 0) = x^2$ tiene la única solución $u(x, y) = (1/4)(y - 2x)^2$.
3. Una EDP con una condición de frontera mal planteada puede no tener soluciones en lo absoluto. Por ejemplo el problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0 & \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R} \\ u(s, s) = s & \text{para todo } s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

no tiene ninguna solución.

Aquí tenemos un contraste entre las ecuaciones diferenciales parciales y las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales. Existe un algoritmo directo para resolver EDO lineales con coeficientes constantes. Por ejemplo, la solución general $u(t)$ de la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^m c_k \frac{d^k u}{dt^k}(t) = 0$$

se puede escribir como una combinación lineal de las funciones $t^p e^{\alpha t}$ con p entero positivo y $\alpha \in \mathbb{C}$. En cambio, las EDP's tienen usualmente demasiadas soluciones como para que exista una fórmula general que incluya todas estas soluciones.

Las EDP's que aparecen en física e ingeniería son generalmente de segundo orden. Las ecuaciones de segundo orden lineales y a coeficientes constantes en el plano \mathbb{R}^2 , tienen la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x, y)$$

Esta ecuación es lineal en el sentido siguiente: si $u(x, y)$ es solución de la ecuación con término no homogéneo $f(x, y)$ y $v(x, y)$ es solución de la ecuación con término no homogéneo $g(x, y)$, entonces $\alpha u + \beta v$ es solución de la ecuación con término no homogéneo $\alpha f + \beta g$.

Al elegir valores particulares para los coeficientes A, B , etc. obtenemos tres ecuaciones clásicas que estudiaremos, con mayor detalle, más adelante:

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \quad \text{ecuación de onda} & \quad (\text{hiperbólica}), \\ u_t = k u_{xx} & \quad \text{ecuación de calor} & \quad (\text{parabólica}), \\ u_{xx} + u_{yy} = 0 & \quad \text{ecuación de Laplace} & \quad (\text{elíptica}). \end{aligned}$$

Los términos hiperbólico, parabólico y elíptico se refieren a que el discriminante $B^2 - AC$ es positivo, cero o negativo respectivamente. Las propiedades generales de las soluciones varían mucho de caso en caso, mientras que las soluciones de un mismo tipo de ecuación tienen características similares.

Ejemplo 1 La ecuación de onda es la única de las tres que se puede reducir a un conjunto de ecuaciones de primer orden. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} & = \partial_t(u_t - cu_x) + c\partial_x(u_t - cu_x) \\ & = \partial_t(u_t + cu_x) - c\partial_x(u_t + cu_x) \end{aligned}$$

De manera que si $u_t = cu_x$ o $u_t = -cu_x$, entonces $u(x, t)$ también satisface $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Por lo que vimos en la sección anterior, se sigue que

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{7.2}$$

donde $\phi(s)$ y $\psi(s)$ son funciones arbitrarias de una sola variable. La constante $c > 0$ representa la velocidad de la onda viajera.

Por consideraciones físicas, esperamos encontrar una única solución $u(x, t)$ que tenga desplazamiento inicial $u(x, 0) = f(x)$, y velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Usando la ecuación 7.2 tenemos que ϕ y ψ satisfacen

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad (7.3)$$

$$c(\phi'(x) - \psi'(x)) = g(x). \quad (7.4)$$

Integrando en ambos lados en la ecuación 7.4 encontramos,

$$\phi(x) - \psi(x) = \phi(0) - \psi(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \quad (7.5)$$

Sumando las ecuaciones 7.3 y 7.5 obtenemos,

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \phi(0) - \psi(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right)$$

y al tomar su diferencia,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - \phi(0) + \psi(0) - \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right).$$

Puesto que $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad (7.6)$$

la solución explícita de la ecuación de onda en términos del desplazamiento inicial y la velocidad inicial. La ecuación 7.6 se conoce como la solución de D'Alambert de la ecuación de onda.

Sin embargo, para otras ecuaciones puede no existir una fórmula explícita de la solución. Puede que tampoco sea claro de qué forma se deben especificar las condiciones de frontera de manera de que la ecuación tenga una única solución.

Por ejemplo

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{EDP} \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

no tiene solución única ya que $u(x, t) = \phi(x + ct) - \phi(x - ct)$ es una solución para cualquier función $\phi(s)$. Por otro lado

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{EDP}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{condiciones de frontera}$$

no tiene ninguna solución.

7.2 EDP con condiciones de frontera bien planteado

La noción de un problema con condiciones de frontera bien planteado se debe a Jacques Hadamard:

Un problema que consiste de una EDP junto con condiciones de frontera, se dice que esta *bien planteado* si existe una única solución y además la solución varía continuamente respecto a sus valores de frontera.

Por la fórmula de D'Alembert vemos que un ejemplo de un problema bien planteado viene dado por

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \\ \left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \right\} & \text{condiciones de frontera.} \end{aligned}$$

Otro ejemplo de un problema bien planteado viene dado por la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$, junto con el requisito de que u coincida con alguna función f en la frontera del disco: $\lim_{r \rightarrow 1} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = f(\theta)$, donde f es una función de periodo 2π . Este es el problema de Dirichlet. Más adelante estudiaremos este problema con mayor detalle, cuando desarrollemos métodos para encontrar u a partir de f . Por ejemplo, si $f(\theta) = \cos^4(\theta)$ entonces la única solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace que cumple con la condición de frontera es

$$u(x, y) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

El concepto de *problema bien planteado* no aparece en ecuaciones diferenciales lineales ordinarias porque basta imponer las condiciones iniciales $(d/dt)^k u(t)|_{t_0} = c_k$ con $0 \leq k \leq m - 1$ en algún punto t_0 , para que la EDO

$$\frac{d^m u}{dt^m}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) \frac{d^k u}{dt^k}(t) = f(t),$$

tenga solución única y que además, esta varíe continuamente con respecto a las condiciones iniciales y con respecto a $f(t)$.

Ahora regresamos a estudiar las tres ecuaciones clásicas de la matemática física.

7.3 Separación de variables

Existe una manera fácil de encontrar soluciones particulares de estas EDP: el método de separación de variables. En el fondo, este método consiste en descomponer las autofunciones de operadores diferenciales complicados en una multiplicación de autofunciones de operadores diferenciales sencillos.

Una autofunción ϕ de un operador diferencial L es una solución no trivial de la ecuación diferencial

$$L\phi + \lambda\phi = 0$$

en donde λ es una constante llamada autovalor del operador L asociado a la autofunción ϕ .

La terminología proviene del álgebra lineal en dimensión finita. Cuando A es una matriz $n \times n$, la ecuación $\vec{y} = A\vec{x}$ define una transformación lineal de \mathbb{R}^n en sí misma, y un $\vec{x} \neq \vec{0}$ es un autovector de A cuando $A\vec{x}$ es un múltiplo constante de \vec{x} mismo, es decir, $A\vec{x} + \lambda\vec{x} = 0$ (En muchos libros los “autovalores” parecen definidos por

$$L\phi = \lambda\phi$$

Pero en las EDP's los autovalores suelen ser números negativos por esto los definimos mediante la ecuación

$$L\phi + \lambda\phi = 0$$

para que los λ 's resulten positivos). En ecuaciones diferenciales se sustituye \mathbb{R}^n por algún espacio de campos escalares diferenciables, y la matriz A por algún operador lineal $L(x, \partial x)$. Cuando $L\phi$ es un múltiplo constante de la propia ϕ , ésta se llama “autofunción” en vez de “autovector”. La convención del signo del autovalor en ecuaciones en derivadas parciales se debe a que habría muchos autovalores negativos si usáramos la otra convención.

Cada número real λ es un autovalor del operador $L = d/dt$. La autofunción ϕ a la que λ está asociado es $\phi(t) = e^{-\lambda t}$. Por muchas razones, es importante buscar los autovalores y autofunciones del operador $L = d^2/dt^2$.

Nuevamente, cada número real λ es un autovalor de este operador. Esta vez las autofunciones asociadas a λ son combinaciones lineales de dos autofunciones linealmente independientes.

El comportamiento de las soluciones depende marcadamente de que λ sea mayor, igual o menor que cero. En efecto,

1. si λ es mayor que cero, escribamos $\mu^2 = \lambda$, $\mu > 0$. De esta manera, la solución general de $\phi''(t) + \mu^2\phi(t) = 0$ es $\phi(t) = A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)$. En este caso, la solución ϕ es una función acotada y oscilatoria.
2. Las autofunciones asociadas a $\lambda = 0$ son líneas rectas $\phi(t) = At + B$.
3. Si $\lambda < 0$ escribamos $\lambda = -\mu^2$ con $\mu > 0$. Entonces la ecuación $\phi''(t) - \mu^2\phi(t) = 0$ tiene la solución general $\phi(t) = A e^{\mu t} + B e^{-\mu t}$ o, equivalentemente $C \cosh(\mu t) + D \sinh(\mu t)$. En este caso, ϕ no es acotada, y no puede oscilar entre valores positivos y negativos.

7.3.1 Separación de variables para el operador de calor

Ahora consideremos el operador de calor

$$L = \partial_t - \partial_x^2$$

y veamos cómo se descompone en los operadores sencillos que acabamos de analizar. Para poder construir autofunciones $\phi(x, t)$ para el operador L asumimos que $\phi(x, t) = X(x)T(t)$. Se puede verificar fácilmente que $\phi(x, t)$ es una autofunción de L si X es autofunción de d^2/dx^2 y T es autofunción de d/dt . Si α y β son los autovalores asociados a estas funciones, es decir

$$\begin{aligned} X''(x) + \alpha X(x) &= 0, \\ T'(t) + \beta T(t) &= 0; \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} L\phi(x, t) &= X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = -X(x)\beta T(t) + \alpha X(x)T(t), \\ L\phi(x, t) &= (\alpha - \beta)\phi(x, t). \end{aligned}$$

Así

$$L\phi = (\alpha - \beta)\phi$$

De manera que $(\beta - \alpha)$ es el autovalor del operador L asociado a la autofunción $\phi(x, t) = X(x)T(t)$. Las soluciones de la ecuación de calor $u_t = u_{xx}$ son las autofunciones del operador $L = \partial_t - \partial_x^2$ cuyos autovalores asociados valen cero. Luego $\alpha = \beta$ en la construcción anterior.

Si queremos que $\phi(x, t)$ esté acotada como función de x para todo t fijo, debemos mirar con cuidado los tres casos $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha < 0$. Para que $X(x)$ sea acotada, es necesario que $\alpha \geq 0$. En este caso

$$\phi(x, t) = (a \cos \mu x + b \operatorname{sen} \mu x) e^{-\mu^2 t}$$

satisface la ecuación de calor $\partial_t u = \partial_x^2 u$ con condición inicial $u(x, 0) = a \cos \mu x + b \operatorname{sen} \mu x$, y $\mu \in \mathbb{R}$ puede ser cualquiera.

Ejemplo 2 Por lo anteriormente expuesto, podemos resolver el siguiente problema con valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} 2x + 5 \cos 3x + 7 \end{aligned}$$

Usando el hecho de que combinaciones lineales de soluciones de la ecuación de calor homogénea también son soluciones de la ecuación de calor (a este hecho se le llama principio de superposición) podemos escribir directamente la solución de este problema como

$$u(x, t) = e^{-4t} \operatorname{sen} 2x + 5 e^{-9t} \cos 3x + 7$$

Desde el punto de vista físico, $u(x, t)$ representa la temperatura a la que se encuentra el punto x de una barra de longitud infinita, en el instante de tiempo t . $u(x, 0)$ representa la forma como estaba distribuido el calor a lo largo de la barra en el instante de tiempo inicial $t = 0$.

Ejemplo 3 Supongamos que queremos considerar el problema del calor sobre una barra de longitud finita $0 \leq x \leq \pi$ cuyos extremos están aislados. Esto significa que el gradiente de temperatura es igual a cero en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$ para todo tiempo t . Si $\phi(x, t)$ representa la temperatura sobre la barra, tenemos que $\phi(x, t)$ debe cumplir

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \partial_x^2 \phi, \\ \partial_x \phi(x, t)|_{x=0} &= 0, \\ \partial_x \phi(x, t)|_{x=\pi} &= 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Estas condiciones de borde son llamadas condiciones de Neumann y son impuestas en las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$ del plano (x, t) . Si suponemos que $\phi(x, t) = X(x)T(t)$ y lo sustituimos en 7.7 obtenemos que

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad \text{para todo } x, \\ X'(0) &= 0 \quad \text{y} \quad X'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Nuevamente debemos considerar los diferentes casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $X(x) = ax + b$ pero como X' debe anularse en dos puntos distintos entonces X debe ser constante. Si $\lambda = \mu^2 > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} X(x) &= a \cos(\mu x) + b \operatorname{sen}(\mu x), \\ X'(x) &= -a \mu \operatorname{sen}(\mu x) + b \mu \cos(\mu x); \\ X'(0) &= 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} X(x) &= a \cos(\mu x), \\ X'(x) &= -a \mu \operatorname{sen}(\mu x), \\ X'(\pi) &= -a \mu \operatorname{sen}(\mu \pi) = 0. \end{aligned}$$

Los números positivos μ que satisfacen $\operatorname{sen} \mu \pi = 0$ son los enteros $n = 1, 2, \dots$. De manera que $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ son las autofunciones de d^2/dx^2 cuyas primeras derivadas se anulan en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; $\cos 0x = 1$ es la misma autofunción encontrada en el caso $\lambda = 0$.

En el caso $\lambda = -\mu^2 < 0$ tenemos que las soluciones de $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ son $X(x) = a \cosh \mu x + b \operatorname{senh} \mu x$. Por tanto

$$\begin{aligned} X'(x) &= a \mu \operatorname{senh}(\mu x) + b \mu \cosh(\mu x); \\ X'(0) &= b \mu = 0 \Rightarrow b = 0. \\ X'(x) &= a \mu \operatorname{senh}(\mu x); \\ X'(\pi) &= a \mu \operatorname{senh}(\mu \pi) = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

y

$$X(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Por esta razón descartamos $\lambda < 0$ como posible fuente de soluciones interesantes.

Concluimos entonces que, salvo constantes multiplicativas, las funciones $\{\cos nx\}$ con n entero, son las únicas soluciones de

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ X'(0) &= 0 \\ X'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando este hecho al problema de calor en la barra finita con extremos aislados, podemos concluir que la suma finita

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{-k^2 t} \cos kx$$

satisface la ecuación de calor junto con ambas condiciones de frontera de Neumann para cualquier elección de las constantes c_0, c_1, \dots, c_n . Por otro lado la condición inicial que satisface la solución así construida es

$$u(x, 0) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \cos kx$$

La teoría de series de Fourier nos explicará cuáles son las sumas trigonométricas que debemos elegir con el propósito de aproximar funciones arbitrarias $f(x)$ propuestas para las condiciones iniciales. Veremos cómo funciona esto en los siguientes capítulos.

Ejercicios

1. Encuentre $u(x, y, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ que satisfaga

$$2\partial_x u + 3\partial_y u + \partial_z u = 0 \quad \text{EDP}$$

$$u(x, y, 0) = xy \quad \text{condición de borde}$$

2. Esta pregunta pretende estudiar la EDP

$$x\partial_y u(x, y) - y\partial_x u(x, y) = f(x, y)$$

donde $u(x, y), f(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- (a) Un punto fijo (x_0, y_0) gira con un ángulo de t radianes, y su posición final se denota como $(x(t), y(t))$, donde

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\dot{x}(t) = -y(t)$ y $\dot{y}(t) = x(t)$. Obtenga una EDO para la función de una sola variable $\phi(t) = u(x(t), y(t))$.

- (b) Deduzca que la EDP $xu_y - yu_x = 1$ no admite una solución $u(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ que esté definida y sea univaluada en todo el plano \mathbb{R}^2 .
3. Un campo escalar en el plano tiene la forma $u(x, y) = (\cos 4x)g(y)$.
- (a) Halle una ecuación diferencial para $g(y)$, que equivale a que $u(x, y)$ satisfaga la ecuación de Laplace

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) u(x, y) = 0.$$

- (b) Determine $g(y)$ de manera que u sea acotada en el semiplano superior $y \geq 0$ y tenga el valor de contorno $u(x, 0) = \cos 4x$, además de cumplir $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
4. Halle todas las autofunciones $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ del operador $L = d/dx + xI$.
5. La ecuación del calor con potencial x^2 puede escribirse

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) - x^2 u(x, t).$$

- (a) Confirme que la campana de Gauss $\phi(x) = e^{-x^2/2}$ es una autofunción del operador $\frac{d^2}{dx^2} - x^2 I$.
- (b) Usando el método de separación de variables, halle una solución $u(x, t)$ de la EDP $u_t = u_{xx} - x^2 u$, que incorpore a $\phi(x)$ como su valor inicial en $t = 0$. Es decir, $u(x, 0) = e^{-x^2/2}$.

Capítulo 8

Series de Fourier

La teoría de series de Fourier busca representar funciones arbitrarias $f(x)$ como combinaciones lineales infinitas de las funciones trigonométricas $\sin nx$ y $\cos nx$, en donde n recorre todos los valores de los enteros no negativos.

8.1 Funciones trigonométricas

Antes de de explicar la utilidad de representar funciones en esta forma, primero veamos algunas de las propiedades de las funciones

$$\phi_n(x) = A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

para n entero y $A_n, B_n \in \mathbb{C}$,

1. Periodicidad: $\phi_n(x + 2\pi) = \phi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2. Autofunción del operador d^2/dx^2 :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + n^2\phi(x) = 0$$

De hecho, ϕ es la solución más general de esta ecuación diferencial.

3. Forma exponencial compleja: Usando las identidades de Euler, $\cos nx = 1/2(e^{inx} + e^{-inx})$ y $\sin nx = 1/2i(e^{inx} - e^{-inx})$, podemos escribir las funciones ϕ_n como

$$\phi(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

en donde $c_n = \frac{1}{2}(B - iA)$ y $c_{-n} = \frac{1}{2}(B + iA)$

4. Valores en la circunferencia unitaria: si definimos $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ por $x^2 + y^2 = 1$, vemos que cada punto de S^1 puede escribirse como $x = \cos \theta$ y $y = \sin \theta$, con una ambigüedad de $\pm 2n\pi$ en el valor de θ . Pero esa ambigüedad se compensa por la 2π -periodicidad: ϕ tiene el mismo valor en todos los θ tales que $(\cos \theta, \sin \theta)$ coincida con el punto $(x, y) \in S^1$. Luego, se puede conceptualizar ϕ como una función con la propia circunferencia S^1 como su dominio de definición:

$$\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

por medio de

$$(\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \phi(\theta) .$$

5. Extensión al plano complejo: la función racional $R(z) = c_n z^n + c_{-n} z^{-n}$ se define en todo el plano complejo menos en $z = 0$. Pero en la notación compleja, la circunferencia unitaria $S^1 \subset \mathbb{C}$ (donde $|z| = 1$) viene dada por $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, para $\theta \in \mathbb{R}$. Luego, al restringir el dominio de $R(z)$ a S^1 , encontramos que

$$R(e^{i\theta}) = c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}$$

la misma ϕ dada al comienzo, pero con x cambiado por θ .

A continuación, consideremos combinaciones lineales finitas de funciones trigonométricas

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

¿Cuales son las propiedades de esta nueva función?

1. $f(x)$ también es periódica, con periodo igual a 2π y, como la suma es finita, $f \in C^\infty$. Además, $f'(x)$ tiene la misma forma, con distintos coeficientes.
2. f no es más una autofunción del operador derivada segunda. Sin embargo, $f(x) = \sum_{n=0}^N \phi_n(x)$ en donde cada una de las ϕ_n es autofunción del operador derivada segunda, con autovalor asociado igual a n^2 : $\phi''(x) + n^2 \phi(x) = 0$.

3. Usando exponenciales complejas, la función f puede escribirse en la forma

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

Los coeficientes c_k están definidos para $-N \leq k \leq N$ mientras que A_n y B_n sólo están definidos para $1 \leq n \leq N$.

4. La función racional compleja $R(z) = \sum_{k=-N}^N c_k z^k$ está íntimamente relacionada a f ya que los valores de frontera de R vienen dados por la función f (esto es, $R(e^{i\theta}) = f(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$).

8.2 Coeficientes de Fourier

Para poder considerar sumas infinitas de funciones trigonométricas, debemos primero entender la relación entre los valores numéricos de $f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ y los valores de los coeficientes c_k . Para obtener el valor de c_0 , simplemente integramos

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \sum_{k=-N}^N c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 2\pi c_0$$

ya que

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Para encontrar los coeficientes c_q con $q \neq 0$, multiplicamos $f(x)$ por e^{-iqx} e integramos:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-iqx} dx = \sum_{k=-N}^N c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-q)x} dx = 2\pi c_q$$

puesto que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-q)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq q \\ 2\pi & \text{si } k = q \end{cases}$$

De manera que la fórmula general

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad -N \leq k \leq N$$

proporciona los valores de los coeficientes c_k a partir de integrales que involucran los valores numéricos de $f(x)$.

Esta fórmula es sencilla y compacta pero requiere el uso de números complejos. Ahora busquemos fórmulas para los coeficientes A_n y B_n de la representación trigonométrica de $f(x)$.

Fundamentalmente necesitamos el valor de la integral $\int_0^{2\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx$ en donde $m, n \geq 0$ y

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= a_n \operatorname{sen} nx + b_n \operatorname{cos} nx \\ \phi_m(x) &= a_m \operatorname{sen} mx + b_m \operatorname{cos} mx.\end{aligned}$$

Si $n \neq m$ se tiene que $\int_0^{2\pi} \phi_n\phi_m = 0$. Esta es la llamada propiedad de ortogonalidad de autofunciones. La prueba estándar de este hecho sigue así:

1. Usamos la identidad de Green

$$fg'' - f''g = \frac{d}{dx}(fg' - f'g)$$

2. Tomando $f = \phi_n$ y $g = \phi_m$ en la identidad de Green y dado que $\phi_n'' = -n^2\phi_n$ y $\phi_m'' = -m^2\phi_m$, obtenemos

$$(n^2 - m^2)\phi_n\phi_m = \frac{d}{dx}(\phi_n\phi_m' - \phi_n'\phi_m)$$

3. Observamos que $w = \phi_n\phi_m' - \phi_n'\phi_m$ es periódica con periodo igual a 2π , de manera que

$$\int_0^{2\pi} \phi_n\phi_m dx = \frac{1}{n^2 - m^2} w(x) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

El caso $n = m$ se trata de la siguiente manera: Observemos que para todo entero n

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{cos}(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{cos}(nx) dx = 0.$$

Si $n \geq 1$ tenemos que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx = \pi$ y $\int_0^{2\pi} \operatorname{cos}^2(nx) dx = \pi$. Para ver esta identidad observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\operatorname{cos}^2(nx) + \operatorname{sen}^2(nx)) dx &= \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} (\operatorname{cos}^2(nx) - \operatorname{sen}^2(nx)) dx &= \int_0^{2\pi} \operatorname{cos}(2nx) dx = 0\end{aligned}$$

Entonces, si $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \operatorname{cos}(nx)$ tenemos que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi c_0.$$

Multiplicando $f(x)$ por $\operatorname{cos} nx$ o $\operatorname{sen} nx$ y usando las propiedades de ortogonalidad de las autofunciones, y la identidad de arriba obtenemos que

$$\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{cos} nx dx = \pi b_n$$

y

$$\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \pi a_n$$

Así obtenemos las fórmulas

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{cos}(nx) dx$$

(En la presentación seno-coseno, el índice de sumatoria recorre $0 \leq m < \infty$, así que

$$f(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \operatorname{sen} mx + b_m \operatorname{cos} mx)$$

mientras que en el estilo exponencial-complejo aparece $-\infty < n < \infty$, de modo que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Para pasar de una versión a la otra, es fácil averiguar que

$$\begin{aligned} a_m &= i(c_m - c_{-m}) \\ b_m &= 1(c_m + c_{-m}) \end{aligned}$$

cuando $m \geq 1$. La constante c_0 es la misma en ambas versiones.

Hasta el momento, hemos visto que cuando $f(x)$ es un polinomio trigonométrico uno puede recuperar sus coeficientes a partir de ciertas integrales. Supongamos que f es una función periódica con periodo igual a 2π que no necesariamente es un polinomio trigonométrico. Nos preguntamos ¿puede $f(x)$ representarse como una suma infinita $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{ikx}$? Si este es el caso, ¿será cierto que los coeficientes c_k vienen dados por la fórmula $c_k = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$? En el siguiente ejemplo presentaremos una función periódica, de periodo 2π , con características que son típicas de la situación general.

Ejemplo 1 Sabemos que para $|z| < 1$ tenemos que

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Luego

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Recordemos que el logaritmo complejo es igual a

$$\log(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z)$$

donde $\beta(z) = \arg(1+z)$ es el ángulo que aparece en la fig. 8.1.

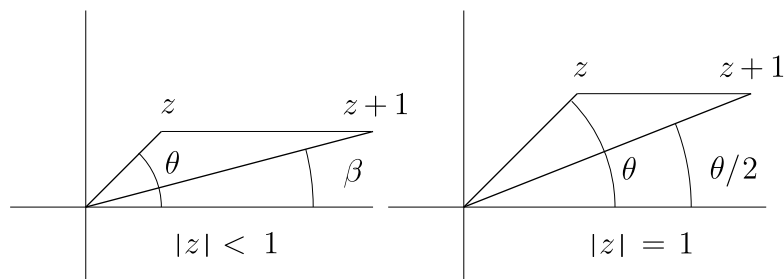


Figura 8.1

Pongamos $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$ y miremos al ángulo β como función de r y θ . Entonces, tomando la parte imaginaria de la serie para $\log(1+z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \beta(r, \theta) &= \text{Im}(\log(1+z)) = \text{Im}\left(re^{i\theta} - \frac{1}{2}(re^{i\theta})^2 + \frac{1}{3}(re^{i\theta})^3 - \frac{1}{4}(re^{i\theta})^4 + \dots\right) \\ \beta(r, \theta) &= r \sin \theta - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta + \dots \end{aligned}$$

Esta serie converge absolutamente si $0 < r < 1$. La gráfica de $\beta(r, \theta)$ sobre el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ aparece en la fig. 8.2.

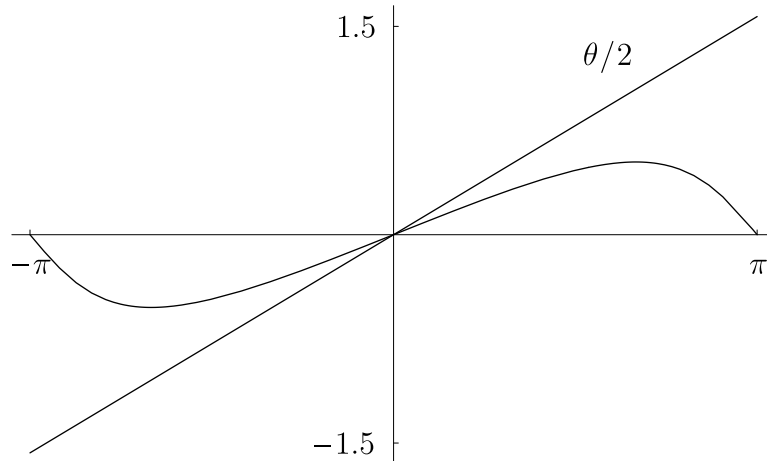


Figura 8.2

Para $-\pi < \theta < \pi$ y $0 < r < 1$, podemos tomar el límite cuando r tiende a 1 de manera que la gráfica de $\beta(r, \theta)$ se aproxime al triángulo acotado por la recta $\theta/2$. Así $\lim_{r \rightarrow 1} \beta(r, \theta) = \theta/2$, sugiriendo que sobre el intervalo $-\pi < \theta < \pi$ se cumple que

$$\frac{\theta}{2} = \text{sen } \theta - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta + \frac{1}{3} \text{sen } 3\theta - \dots \quad (1)$$

en algún sentido. Este es nuestro primer ejemplo no trivial de una serie de Fourier. Los coeficientes $(-1)^{n+1}/n$ aparecen cuando $r \rightarrow 1$ en la serie del logaritmo. Si desde un principio sólo se nos hubiesen dado la función $f(\theta) = \theta/2$ sobre $-\pi < \theta < \pi$, podríamos haber calculado los mismos coeficientes

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{2} \cos(n\theta) d\theta = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{2} \text{sen}(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta \text{sen}(n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\theta \cos(n\theta)}{n} \Big|_{\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{n} d\theta; \\ a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

¿Hasta qué punto podemos confiar en la precisión de la identidad (1)? Las funciones $\sin(n\theta)$ son periódicas mientras que $\theta/2$ no lo es. Sin embargo, parece que $\theta/2$ coincide con la serie en el intervalo $-\pi < \theta < \pi$. Por lo tanto, es natural definir la función periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \theta/2 && \text{si } |\theta| < \pi \\ f(\theta + 2\pi) &= f(\theta), && \text{para todo } \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

f se llama la extensión 2π -periódica de $\theta/2$, a partir del intervalo $-\pi < \theta < \pi$. Evidentemente, $f(\theta)$ es suave a trozos, con discontinuidades en $\{\pm n\pi\}$. Si graficamos la tercera suma parcial $\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta$ vemos que

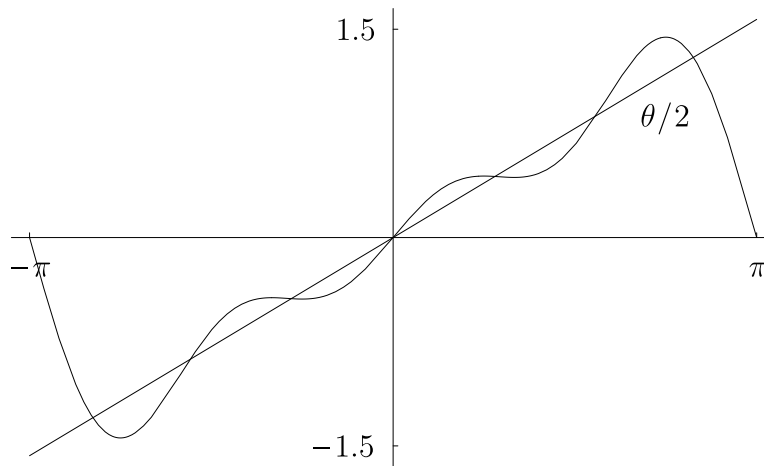


Figura 8.3

su gráfica no está muy lejos de la gráfica de $f(\theta)$, sugiriendo que nuestra serie de Fourier converge a $f(\theta)$.

En el próximo capítulo nos proponemos explicar en qué sentido esto es cierto.

Ejercicios

1. Un número $T_0 > 0$ es un período para $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si se cumple $f(x + T_0) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$. Halle un período para $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x) + \cos(\frac{\pi}{4}x)$.
2. Las funciones $\left\{ \cos \frac{2\pi nx}{T_0}, \sin \frac{2\pi nx}{T_0} \right\}$, para $n = 0, 1, 2, \dots$ son T_0 -periódicas.

Suponiendo

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^N \left(A_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T_0} + B_n \operatorname{cos} \frac{2\pi nx}{T_0} \right)$$

halle fórmulas integrales que proporcionan C_0, A_n, B_n en términos de los valores numéricos de $f(x)$.

3. Es válida la relación

$$e^{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{cos} nx$$

para ciertas constantes b_n . Determine las b_n 's, restringiendo la función compleja-analítica e^z a la circunferencia unitaria.

4. Una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene la propiedad de que el valor de $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ es independiente de a . Demuestre que esto es cierto precisamente cuando $f(x)$ es 2π -periódica.

Capítulo 9

Teoría L^2 de las Series de Fourier

Nuestra tarea consiste en entender funciones suaves a trozos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(x + 2\pi) = f(x)$, y en particular entender por qué estas funciones siempre se pueden escribir como una serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

En el capítulo anterior vimos que si f es una suma trigonométrica finita, entonces los coeficientes c_k se obtienen a partir de la fórmula

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Esta fórmula no es pura casualidad, sino que es el resultado de la teoría general de la aproximación cuadrática media, como veremos a continuación.

9.1 La norma L^2

En muchas aplicaciones, una función $f(x)$ tiene importancia, no tanto por su valor numérico en un $x \in \mathbb{R}$ particular, sino por el valor promedio de $|f(x)|^2$ sobre algún intervalo $a \leq x \leq b$. Como el promedio es la integral dividida por $b - a$, se pueden formalizar las cuentas en la siguiente forma:

1. Se puede decir que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ están cerca, si sus gráficas son parecidas. Para nuestros propósitos es mejor tomar

$$\|f - g\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

como la cantidad cuya pequeñez nos indicará que $f \approx g$. En este caso diremos que f es aproximadamente igual a g en la media cuadrada. A la cantidad $\|f - g\|$ la llamaremos la norma L^2 de la función $f - g$.

La fórmula análoga para la distancia L^2 en \mathbb{R}^n entre puntos $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es $\|\vec{x} - \vec{y}\|_{L^2} = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$, que no es otra cosa que la distancia euclídeana.

2. Si introducimos el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

para dos funciones complejas f y g , es inmediato que

$$\|f - g\|_{L^2}^2 = \langle f - g, f - g \rangle.$$

El producto $\langle f, g \rangle$ cumple con todas las propiedades usuales del producto interno de vectores, como si fuera $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}$, con $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ y $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ puntos de \mathbb{C}^n :

- Linealidad:

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \langle \alpha_1 f_1, g \rangle + \langle \alpha_2 f_2, g \rangle.$$

- Positividad:

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \text{ con } \langle f, f \rangle = 0 \text{ sólo si } f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Simetría Hermítica:

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

- También tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle f + g, f + g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \\ \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

3. Diremos que dos funciones, f y g , son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0$. En este caso, la identidad de arriba nos permite deducir que

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad \text{“Pitágoras”}.$$

En particular, $\|f + g\|^2 > \|f\|^2$

4. Dada dos funciones f y g siempre podemos elegir una constante $\alpha \in \mathbb{C}$ de manera que $f - \alpha g$ sea ortogonal a g . Esta constante α , cuyo valor es $\alpha = \langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$, se llama el *coeficiente de Fourier de f con respecto a g* . La función αg se llama la proyección ortogonal de f sobre el espacio $\{\beta g\}$ de todos los múltiplos complejos de g .

Nuevamente, la terminología proviene de \mathbb{R}^n cuando “proyectamos un punto \vec{x} sobre la recta determinada por $\vec{0}$ y algún $\vec{y} \neq \vec{0}$ ”.

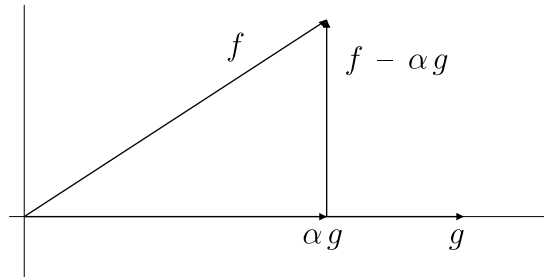


Figura 9.1

5. La ecuación $f = (f - \alpha g) + \alpha g$ expresa a f como una suma de funciones ortogonales y por lo tanto

$$\|f\| \geq \|\alpha g\| = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\langle g, g \rangle} \|g\| = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|g\|}$$

Esto prueba la desigualdad de Schwartz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

6. Si aplicamos la desigualdad de Schwartz a la expansión bilineal de $\|f + g\|$ obtenemos que

$$\|f + g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2$$

de forma que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Esta es la desigualdad triangular para la norma L^2 .

7. Ahora supongamos que g_1, g_2, \dots, g_N , son mutuamente ortogonales y que deseamos aproximar alguna función f mediante una combinación lineal de las funciones g_k ; es decir, queremos minimizar la cantidad

$$\|f - \sum_{k=1}^N \beta_k g_k\|$$

en donde $\beta_k \in \mathbb{C}$ para $1 \leq k \leq N$. Si tomamos $\beta_k = \langle f, g_k \rangle / \langle g_k, g_k \rangle$, entonces obtenemos

$$\mathbf{P}f = \sum_{k=1}^N \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k$$

que no es otra cosa que la proyección ortogonal de f sobre el espacio generado por g_1, g_2, \dots, g_N . Por construcción tenemos que $\langle \mathbf{P}f, g_k \rangle = \langle f, g_k \rangle$ para $k \leq N$, es decir $\langle \mathbf{P}f - f, g_k \rangle = 0$ y por lo tanto, $\mathbf{P}f - f$ es ortogonal a cada función g_k . Si comparamos $\mathbf{P}f$ con cualquier otra combinación lineal $\sum_{k=1}^N \beta_k g_k$ vemos que

$$f - \sum_{k=1}^N \beta_k g_k = \left(f - \sum_{k=1}^N \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} - \beta_k \right) g_k$$

Como esta es una suma de funciones ortogonales, el teorema de Pitágoras nos dice que

$$\|f - \sum_{k=1}^N \beta_k g_k\|^2 = \|f - \mathbf{P}f\|^2 + \sum_{k=1}^N \left| \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} - \beta_k \right|^2 \|g_k\|^2$$

Esta identidad demuestra que la mejor aproximación cuadrática media de f , por una combinación lineal de las funciones g_k , viene dada por $\mathbf{P}f$, la proyección ortogonal de f sobre el espacio generado por las funciones g_k .

En el dibujo, se puede observar que 0 , f y $\mathbf{P}f$ forman un triángulo recto y que $f - \mathbf{P}f$ es ortogonal a $\mathbf{P}f$. Por lo tanto, $\|f\|^2 \geq \|\mathbf{P}f\|^2$.

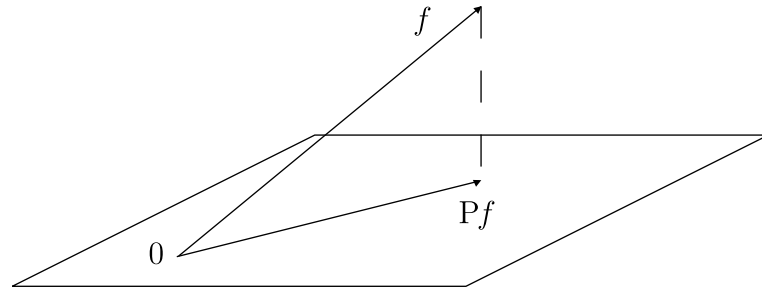


Figura 9.2

Esta es la *desigualdad de Bessel*:

$$\|f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{k=1}^N \left| \frac{\langle f, g_k \rangle}{\|g_k\|} \right|^2$$

siempre que g_1, g_2, \dots, g_k sean funciones no nulas y mutuamente ortogonales.

9.2 Series de Fourier

Las construcciones a) – g) se aplican al caso donde f es periódica, suave a trozos y las funciones $g_k(x) = e^{ikx}$, para $-N \leq k \leq N$. Observemos que $\langle f, g_k \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx$, $\langle g_k, g_k \rangle = 2\pi$ y que $c_k = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx = \langle f, g_k \rangle / \langle g_k, g_k \rangle$. La suma

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

es la proyección ortogonal de f sobre el espacio generado por las combinaciones lineales de $\{e^{ikx}\}_{k=-N}^N$. Por construcción tenemos que para $-N \leq k \leq N$ ocurre que $\langle f - S_N, e^{ikx} \rangle = 0$, de manera que $\langle f - S_N, S_N \rangle = 0$. Como la expresión $f = (f - S_N) + S_N$ es entonces una suma de funciones ortogonales el teorema de Pitágoras nos dice que

$$\|f\|^2 = \|f - S_N\|^2 + \|S_N\|^2$$

De manera que probar que $\|f - S_N\|^2$ es pequeño, es equivalente a mostrar que $\|S_N\|^2$ es aproximadamente igual a $\|f\|^2$

Observación: El hecho de que S_N en efecto tiende a f en el sentido cuadrático medio puede ser considerado como el **hecho central de la teoría de series de Fourier**.

Para que haya convergencia L^2 de la serie de Fourier es suficiente que f cumpla la sola condición $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Así, la teoría L^2 retiene muchas de las características físicas más importantes, mientras evita la necesidad de agregar hipótesis adicionales.

Teorema 9.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave a trozos, de periodo 2π . La serie formal de Fourier es

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0 \quad (9.1)$$

(Convergencia L^2 de series de Fourier)

y

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \quad (9.2)$$

(Teorema de Parseval)

Observación: Estas afirmaciones al ser escritas en el lenguaje de la norma L^2 , toman la forma:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N\|^2 = 0 \quad (9.3)$$

y

$$\|f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 \quad (9.4)$$

Demostración (Teorema de parseval):

Dada cualquier función f vimos que $\|f - S_N\|^2 = \|f\|^2 - \|S_N\|^2$. Por tanto, el teorema de Parseval es cierto si y sólo si la convergencia L^2 es cierta.

Esta prueba se presenta partiendo de un ejemplo donde el teorema se verifica directamente. Luego se hace un análisis con aproximaciones por funciones constantes a trozos.

Miremos el ejemplo del capítulo anterior y observemos lo que la identidad de Parseval nos dice en este caso. Recordemos que si $0 \leq r < 1$ entonces

$$\beta(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta - \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} 3\theta - \dots$$

Si elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado, integramos de $-\pi$ a π y tomamos en cuenta que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} p\theta \operatorname{sen} q\theta d\theta = 0$ si $p \neq q$ y que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 p\theta d\theta = \pi$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\beta(r, \theta))^2 d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{r^{2n}}{n^2}$$

Ahora, tomemos el límite de ambos lados de esta identidad cuando $r \rightarrow 1$. Recordemos que si $-\pi < \theta < \pi$ entonces $\lim_{r \rightarrow 1} \beta(r, \theta) = \theta/2$. Además, $|\beta(r, \theta)| \leq \frac{|\theta|}{2}$, para todo $-\pi < \theta < \pi$ y todo $0 \leq r < 1$. Luego, el teorema de la convergencia dominada se aplica, de modo que:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} (\beta(r, \theta))^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta^2}{4} d\theta = \frac{\pi^3}{6}$$

y

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{r^{2n}}{n^2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Así obtenemos la conclusión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta identidad verifica Parseval para la función $f(\theta) = \theta/2$. También hemos probado que la serie de Fourier de $f(\theta)$ converge en la norma L^2 a $f(\theta)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\theta}{2} - \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sen} k\theta}{k} \right)^2 d\theta = 0$$

Ahora, debemos probar ambos teoremas para funciones más generales. Existen dos principios que nos ayudarán en esta tarea.

1. Traslación de series de Fourier.

La función $g(x) = f(x - a)$ es la trasladada de f por a unidades. Si f es suave a trozos y periódica, con periodo igual a 2π y la serie formal de Fourier para f es $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, entonces g tiene la serie de Fourier

$$g(x) = f(x - a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ika} e^{ikx}$$

como puede verificarse de la fórmula de los coeficientes de Fourier. Si $S_N(x)$ es la suma parcial de Fourier para $f(x)$ entonces $S_N(x - a)$ es la suma parcial de Fourier para g . Tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{-ina}|^2$$

y que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx$$

De manera, que los dos teoremas, el de Parseval y el de la convergencia en L^2 son invariantes bajo translación.

2. Linealidad

Supongamos que $h = \alpha f + \beta g$ en donde f y g son suaves a trozos y de periodo 2π . Si

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx}$$

entonces

$$h(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) e^{ikx}$$

y $S_N h = \alpha S_N f + \beta S_N g$ donde S_N es la suma parcial N -ésima de Fourier. Por lo tanto,

$$h - S_N h = \alpha(f - S_N f) + \beta(g - S_N g)$$

Así

$$\|h - S_N h\| \leq |\alpha| \|(f - S_N f)\| + |\beta| \|(g - S_N g)\|$$

por la desigualdad triangular. Si ocurre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|g - S_N g\| = 0$$

tendremos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|h - S_N h\| = 0$. Esto muestra que ambos teoremas son válidos para combinaciones lineales de funciones para las cuales estos teoremas son ciertos.

Regresemos ahora al ejemplo clave, $f_0(x) = x/2$ si $-\pi < x < \pi$ y $f_0(x + 2\pi) = f_0(x)$. Es posible encontrar constantes A , B , C , α y β tales que la función $p(x) = Af_0(x - \alpha) + Bf_0(x - \beta) + C$ es la extensión 2π -periódica del pulso rectangular de la figura 9.3.

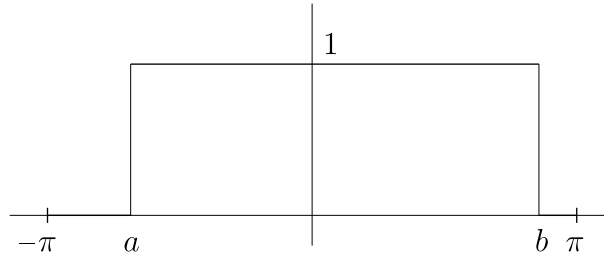


Figura 9.3

En consecuencia, $p(x)$ es el límite en L^2 de su serie de Fourier. Más aún, si tomamos combinaciones lineales de funciones del tipo $p(x)$, podemos construir extensiones periódicas de cualquier función de la forma $e(x)$ como la que aparece en la figura 9.4.

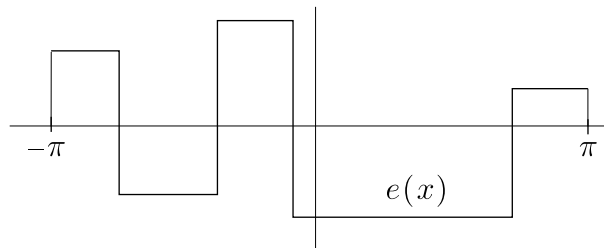


Figura 9.4

Cualesquiera que sean los coeficientes de Fourier de $e(x)$ sabemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |e(x) - S_N e(x)|^2 dx = 0$$

Finalmente, cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suave a trozos de periodo 2π puede ser aproximada por funciones de la forma $e(x)$, en el sentido de que la norma L^2 cumple $\|f - e\| < \epsilon$, donde $\epsilon > 0$ es cualquier número pequeño. Pero

$$\|e - S_N e\| < \epsilon$$

para N suficientemente grande, de manera que $\|f - S_N e\| < 2\epsilon$. Sin embargo el polinomio trigonométrico óptimo de orden N que mejor se aproxima a f en el sentido L^2 es $S_N f$, en donde los coeficientes de Fourier aparecen. Por lo tanto,

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - S_N e\| < 2\epsilon$$

para N suficientemente grande. Esto termina la prueba de que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\| = 0$ para funciones arbitrarias suaves a trozos, de periodo 2π , así como la prueba del teorema de Parseval.

Ejercicios

1. Las funciones $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_1(x) = x$ son ortogonales sobre $-\pi < x < \pi$. Halle α y β que minimicen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\alpha + \beta x - \sin x|^2 dx$$

2. Una función 2π -periódica puede construirse por medio de

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(x - 2n\pi)$$

cuando $p(x)$ se anula fuera de algún intervalo finito. Para facilitar el cálculo de la serie de Fourier, verifique que

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) e^{-iky} dy$$

para todo entero k .

3. Defínase

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{para } x > \pi. \end{cases}$$

- (a) Calcule $(\frac{d}{dx})_{\text{gen}}^2 p(x)$.
- (b) Calcule la integral $\int_{-\infty}^{\infty} p(y)e^{-i\omega y} dy$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, tratando $e^{i\omega y}$ como “función de prueba”.
- (c) Obtenga la serie de Fourier de $f(x)$, donde $f(x+2\pi) = f(x)$, mientras que $f(x) = p(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. (Utilice el ejercicio anterior.)
4. Una función $f(x)$ continua en $0 \leq x \leq 2\pi$ satisface

$$\int_0^{2\pi} (\cos nx)f(x) dx = \int_0^{2\pi} (\sen nx)f(x) dx = 0$$

para todo $n = 1, 2, \dots$. Aplique la teoría L^2 para comprobar que $f(x)$ es constante.

5. “Se le pidió a un estudiante hallar una función $f(x)$, suave a trozos, par y 2π -periódica en $-\infty < x < \infty$ cuya serie de Fourier es

$$f(x) \sim \cos x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 3x}{\sqrt{3}} + \frac{\cos 4x}{\sqrt{4}} + \dots$$

Explique por qué el estudiante no pudo responder esta pregunta.

6. Formalmente, parece natural que

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \implies f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (inc_n) e^{inx}$$

es decir, $inc_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx} dx$. Supóngase que f es 2π -periódica y suave a trozos, con puntos de corte $\{x_n\}$ que no incluyen 0 y 2π . Confirme la conjetura dada, siempre y cuando $f'(x)$ se refiere a la derivada generalizada.

Capítulo 10

Convergencia Puntual de Series de Fourier

10.1 Teoremas de Convergencia Puntual

Para usar las series de Fourier con confianza, necesitamos conocer qué tan bien está una función representada por su serie de Fourier. Esta cuestión, a su vez, depende de propiedades de la función que en muchos casos son fácilmente observables.

La teoría L^2 nos dice que cuando $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ podemos estar seguros de que los coeficientes $c_k = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx$ y las sumas parciales $S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ representan a la función en el sentido “cuadrático medio”, $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = 0$. Puesto que $f - S_N$ es ortogonal a S_N , como lo vimos en el capítulo anterior, podemos asegurar que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

Este es el teorema de *Parseval* para funciones L^2 en $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

lo que implica que necesariamente, la sucesión de coeficientes de Fourier de una función L^2 deben ser cuadrado sumables. Más aun, debe suceder que

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k = 0$$

Hasta ahora, lo que hemos visto es que los gráficos de las sumas parciales S_N se mueven hacia el gráfico de la función f , al menos cuando f está en L^2 . Pero ¿bajo qué circunstancias podemos establecer que la serie de Fourier converge exactamente al valor numérico de $f(x)$ en algún punto particular $x = a \in \mathbb{R}$?

Para economizar espacio, tomemos $a = 0$. Tenemos el siguiente

Lema 10.1 Sea $f(x)$ una función definida en $-\pi \leq x \leq \pi$, con $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Supongamos que existe una vecindad V de 0, $V = \{x \mid -r \leq x \leq r\}$ con $0 \leq r \leq \pi$, en la cual f satisface una condición de Lipschitz: $|f(x) - f(y)| \leq \mathcal{L}|x - y|$, para todo $x, y \in V$ y $\mathcal{L} < \infty$ alguna constante positiva. Entonces

$$f(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k$$

donde

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

y

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Demostración: Tenemos que mostrar que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k = f(0)$. La suma parcial de los coeficientes se escribe

$$\sum_{k=-N}^N c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x) dx$$

Para todo N , el núcleo $D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$ satisface $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$ y puede ser reescrito, por la fórmula de la progresión geométrica, como

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1}$$

Ahora,

$$\sum_{k=-N}^N c_k - f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) D_N(x) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} (e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}) \frac{f(x) - f(0)}{e^{ix} - 1} dx$$

El cociente $h(x) = (f(x) - f(0))/(e^{ix} - 1)$ es tal que su denominador se anula en $x = 0$. Sin embargo,

$$|e^{ix} - 1| = |2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}| \geq \frac{2}{\pi} |x|$$

para $-\pi \leq x \leq \pi$, mientras que $|f(x) - f(0)| \leq \mathcal{L}|x|$ cuando x varía en el intervalo $-r < x < r$. Por consiguiente, $h(x)$ es realmente una función acotada en $-r < x < r$, $r \neq 0$. En consecuencia, $|h(x)|$ no es mayor que $|f(x)|$ más una constante, en todo el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, probando que $h(x)$ está en L^2 .

Así, la cantidad $f(0) - \sum_{k=-N}^N c_k$ aparece como la diferencia de dos de los coeficientes en la serie de Fourier de la función $h(x) \in L^2$. Por tanto, dicha cantidad tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Esto termina la demostración del lema.

El lema se aplica en situaciones más generales, después de un cambio de variables.

Teorema 10.1 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π periódica, con $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leq \infty$. La serie formal de $g(x)$ es, como siempre,

$$g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} dx$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(x)$ satisface una condición de Lipschitz en algún intervalo $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$. Entonces

$$g(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ika}$$

Demostración: Basta que hagamos $f(x) = g(x + a)$. La serie formal de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (c_k e^{ika}) e^{ikx}$$

porque

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik(x-a)} g(x) dx = e^{ika} c_k$$

El lema dice que $f(0)$ es la suma de los coeficientes de Fourier de $f(x)$. Esto es justamente lo que el teorema demanda: $g(a)$. Esto completa la prueba del teorema.

La teoría que acabamos de exponer puede ser aplicada al ejemplo “clave” donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es 2π periódica con $f(x) = x/2$ en $-\pi < x < \pi$. Hemos visto que la serie de Fourier para este ejemplo es

$$\text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } 2x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x - \dots = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

escribiendo $c_0 = 0$, $c_k = (-1)^{k+1}/(2ki)$ para $k =$ entero no nulo. Cuando x está estrictamente entre $\pm\pi$, vale el teorema y tenemos la certeza de que

$$\frac{x}{2} = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } 2x + \dots$$

Más aun, como ya sabemos, $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ es finita, pero $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| = \infty$ porque $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ diverge. Esta divergencia presumiblemente es una consecuencia de las discontinuidades de la función 2π periódica $f(x)$.

Volvamos atrás y consideremos una función general $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π periódica. ¿Qué condiciones debería satisfacer la función g para que quede garantizado que $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$, esto es, para que $g(x)$ tenga una *serie de Fourier absolutamente convergente*?

Teorema 10.2 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función 2π periódica, globalmente Lipschitz (quiere decir que existe algún $\mathcal{L} < \infty$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq \mathcal{L}|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Entonces $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ (absolutamente convergente) donde $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} dx$, y en particular, $g(x)$ es el límite uniforme de las sumas parciales $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ de sus serie de Fourier.

Demostración: Corta, pero muy técnica. La omitimos.

¿Por qué no es $x/2$ Lipschitz continua?. Todo depende del dominio que uno esté considerando. En el intervalo $-\pi < x < \pi$, $f(x) = x/2$; pero sobre

la recta \mathbb{R} entera, tenemos que tomar la extensión 2π periódica de $x/2$ en el intervalo que, necesariamente, es discontinua como función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: sus puntos de corte son $\{ \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots \}$.

Ejemplo 1 Para ver un ejemplo donde vale la proposición, consideremos la extensión de la cuerda pulsada $g(x)$ (ver figura).

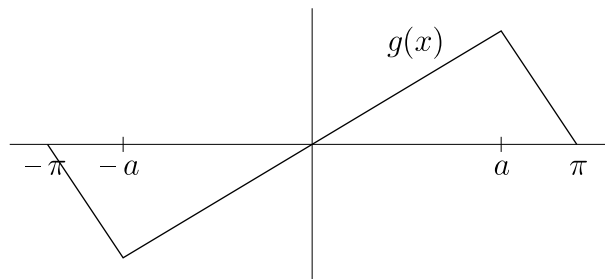


Figura 10.1

El que la función sea impar nos sugiere que evitemos el uso de las funciones exponenciales e^{ikx} en favor de las funciones trigonométricas $\text{sen } nx$ y $\text{cos } nx$. Al tomar en cuenta la imparidad llegamos a que

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } nx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \text{sen } nu \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(u) \text{sen } nu \, du \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes definamos

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ g(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

Asumiendo que $g(a) = 1$, la primera derivada generalizada de $h(x)$ se parece a la figura 10.2

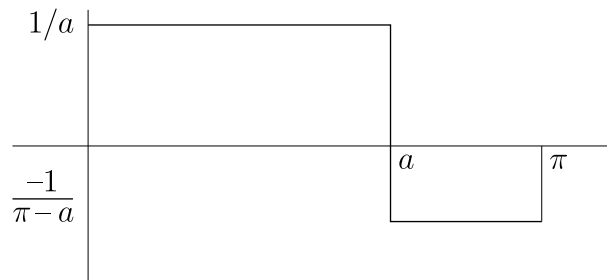


Figura 10.2

y no aparecen deltas. La segunda derivada generalizada sin embargo es

$$h''_{\text{gen}} = \frac{1}{a}\delta(x) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\pi - a}\right)\delta(x - a) + \frac{1}{\pi - a}\delta(x - \pi)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \operatorname{sen} nx \, dx &= -\frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} h''_{\text{gen}} \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{\pi}{a(\pi - a)} \operatorname{sen} na \end{aligned}$$

De forma tal que

$$a_n = \frac{1}{n^2} \frac{\pi}{a(\pi - a)} \operatorname{sen} na$$

que claramente satisfacen $\sum_1^{\infty} |a_n| < \infty$. La elección particular $a = \pi/2$, conduce a la serie

$$\sum_1^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} nx = \frac{8}{\pi^2} \left\{ \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{9} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{25} - \dots \right\}$$

Aplicaciones de los teoremas de convergencia

Nos preguntamos ahora ¿cuándo es que se puede aplicar toda la teoría de convergencia? Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es 2π periódica y C^∞ : las derivadas de todo orden, $(d/dx)^p f(x)$ existen y son continuas. ¿Qué tipo de series nos vamos a encontrar?

Formalmente

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

sugiriendo que la derivada de f tendría la serie

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (ikc_k)e^{ikx}$$

Esto se puede confirmar integrando por partes en la fórmula de los coeficientes. En tanto que f sea periódica y C^∞ , no es necesario distinguir las derivadas generalizadas.

Repitiendo este proceso p veces, encontramos que $\sum_{-\infty}^{\infty} |k^p c_k|^2 < \infty$ porque estos son los coeficientes de una función de L^2 . Por tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^p |c_k| = 0$ independientemente de cuán grande sea p .

En resumen, la sucesión de coeficientes de Fourier de una función periódica C^∞ tienden a cero más rápidamente que cualquier potencia del índice entero k en la notación $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Más aun, la igualdad $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ vale, así como también la derivación e integración término a término.

Ejemplo 2 Un ejemplo muy importante de la serie de Fourier de una función C^∞ está dado por $f(\theta) = e^{ir \operatorname{sen} \theta}$ donde $r > 0$ es un parámetro positivo y $-\infty < \theta < \infty$. La parte real de f aparece en los textos de electrónica como una señal de frecuencia modulada.

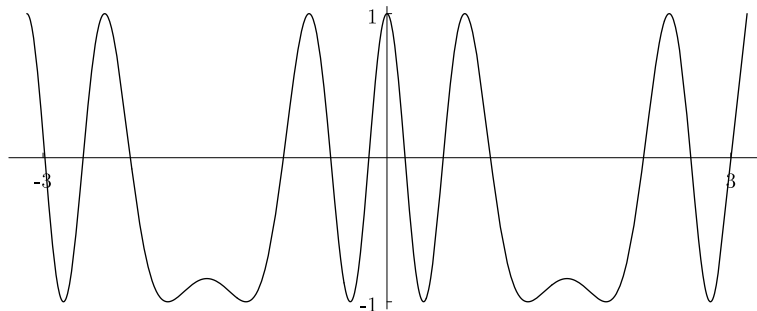


Figura 10.3

Los coeficientes de la serie de Fourier dependen de r , y se llaman funciones de Bessel de orden entero. La fórmula

$$e^{ir \operatorname{sen} \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in\theta}$$

convierte a $e^{ir \operatorname{sen} \theta}$ en la *función generatriz* para las funciones J_n . Por la teoría anteriormente expuesta sabemos que para r fijo, $J_n(r)$ disminuye rápidamente cuando n tiende a $\pm\infty$.

Más aun, puesto que las funciones $J_n(r)$ aparecen como los coeficientes de Fourier de $e^{ir \operatorname{sen} \theta}$, la fórmula generatriz produce expresiones integrales para $J_n(r)$. En particular

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(r \operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^{2n} d\theta \\ &= 1 - \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Dada $f \in C^\infty$ tal que $f(x + 2\pi) = f(x)$ y $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, se quiere una segunda función $g(x)$ cuya representación en serie de Fourier es

$$g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{inx} .$$

Confirme que se logra este propósito con la “autocorrelación”

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \overline{f(s-x)} ds$$

2. $f(x)$ es la extensión 2π -periódica de la función representada en la figura 10.4,

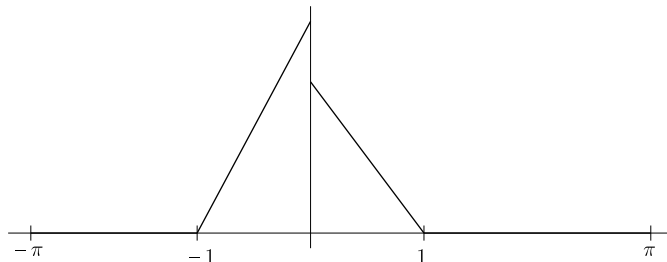


Figura 10.4

donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } -1 < x \leq 0, \\ a(1 - x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Su serie de Fourier es

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- (a) Verifique que $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ diverge a $+\infty$ cuando $a \neq 1$, mientras que $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ cuando $a = 1$. Evalúe, de hecho, el valor numérico de la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n$ en el caso $a = 1$.
3. Una función $f(x) \in C^\infty$ satisface $f(x + 2\pi) = f(x)$ y $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Examine su serie de Fourier y compruebe que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|^2 dx$$

Hallar todas las $f(x)$ para las cuales las dos integrales son iguales.

4. A partir de

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$$

es natural preguntarse que función $h(x)$ se puede construir como

$$h(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{inx}$$

Confirme que esta $h(x)$ tiene la forma

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(x - s) ds$$

La función $h(x)$ puede llamarse la “ 2π -convolución” de f y g .

5. La serie $\sum_{n \neq 0} e^{inx}$ no cabe en la teoría L^2 , pero su segunda antiderivada formal

$$f(x) \sim - \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2}$$

converge absolutamente, como función de x .

(a) Halle la serie de Fourier de $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$F(x) = x(2\pi - x) \text{ en } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ y } F(x + 2\pi) = F(x) .$$

(b) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = cf(x) + \text{constante}$.

(c) Calcule $(\frac{d}{dx})_{\text{gen}}^2 F(x)$ y evalúe así la serie $\sum_{n \neq 0} e^{inx}$.

Capítulo 11

Aplicaciones de las Series de Fourier

La teoría de Fourier nos permite representar funciones generales $f(x)$ como superposiciones de funciones especiales $e^{i\omega x}$ para distintos $\omega \in \mathbb{R}$. En particular, la representación de funciones 2π periódicas se realiza con éxito mediante series de Fourier donde ω no es un número real cualquiera sino que está restringido a los números de la forma πn , con n entero. Las aplicaciones en física e ingeniería de la teoría de Fourier se basan en el hecho de que funciones de la forma

$$\phi(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} = C_1 \cos \omega x + C_2 \operatorname{sen} \omega x$$

satisfacen $\phi''(x) + \omega^2 \phi(x) = 0$, esto es, son autofunciones del operador de Laplace unidimensional con autovalor ω^2 . (El signo de $\omega^2 = \lambda > 0$ es importante. Un λ negativo daría autofunciones $e^{\omega x}$ y $e^{-\omega x}$ sobre las cuales la teoría de Fourier no nos ha dicho nada.)

Las series de Fourier caben dentro del tópico, ligeramente más general, de las expansiones en autofunciones, donde algunas de las ϕ de arriba son seleccionadas porque satisfacen condiciones adicionales.

Ejemplo 1 La teoría de la conducción de calor y radiación sugieren el siguiente problema de valores de frontera mixtos (PVFM).

Dado un intervalo finito, $a < b$ y números no negativos $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ con $0 < \alpha_0 + \alpha_1, 0 < \beta_0 + \beta_1$. Encontrar todas las funciones $\phi(x)$ y constantes λ tales que $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$ para todo x , mientras en los extremos a y b :

$$\alpha_0 \phi(a) = \alpha_1 \phi'(a)$$

$$\beta_0 \phi(b) = -\beta_1 \phi'(b)$$

En general el PVFM tiene autofunciones $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ y autovectores $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. La no-negatividad de los autovalores λ es una consecuencia de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\phi(x)\phi'(x)) &= (\phi'(x))^2 + \phi(x)\phi''(x) \\ &= (\phi'(x))^2 - \lambda(\phi(x))^2. \text{ Luego} \end{aligned}$$

$$\phi(b)\phi'(b) - \phi(a)\phi'(a) = \int_a^b (\phi'(x))^2 dx - \lambda \int_a^b (\phi(x))^2 dx.$$

La forma peculiar en que hemos escrito las condiciones de frontera implica que $\phi(b)\phi'(b) \leq 0$ y que $\phi(a)\phi'(a) \geq 0$, por lo que $\lambda \int_a^b (\phi(x))^2 dx \geq 0$ tal como, fue dicho.

Como segundo resultado general tenemos que las autofunciones $\phi_n(x)$ y $\phi_m(x)$ son ortogonales cuando sus autovalores son distintos, es decir, $\lambda_n \neq \lambda_m$. Para ver por qué, pongamos $W(x) = \phi_n(x)\phi'_m(x) - \phi'_n(x)\phi_m(x)$. Al calcular W' encontramos que $W'(x) = (\lambda_n - \lambda_m)\phi_n(x)\phi_m(x)$. Así

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx = W(b) - W(a) = 0,$$

porque

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \phi_n(x) & \phi'_n(x) \\ \phi_m(x) & \phi'_m(x) \end{pmatrix}$$

y las columnas de la matriz son linealmente dependientes tanto en $x = a$ como en $x = b$ dado que ϕ_n y ϕ_m satisfacen el PVFM. Esto prueba la ortogonalidad.

Antes de considerar PVFM más específicos notemos que un sencillo cambio de variables $x = mu + p$ lleva al intervalo $a \leq x \leq b$ a cualquier intervalo que uno quiera en el eje de las u , reemplazando la autofunción $\phi(x)$ por la autofunción $\phi(mu + p)$ en el eje de las u . Los autovalores y las condiciones de frontera son reemplazadas por otras, cuyo cálculo es rutinario.

11.1 Series de Fourier Seno

Estudiemos el problema de valores de frontera mezclado en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, con condiciones de frontera de Dirichlet $\phi(0) = 0$ y $\phi(\pi) = 0$. Es fácil

ver que las soluciones a

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

son las funciones $\{\sin x, \sin 2x, \dots\}$ con autovalores $\{1, 4, 9, \dots\}$. Dada una función arbitraria $f(x)$ definida en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, la aproximación óptima en la media cuadrática a $f(x)$ mediante $\sum_1^n a_k \sin kx$ queda determinada si el valor de los coeficientes esta dado por

$$a_k = \frac{\langle f, \sin kx \rangle}{\langle \sin kx, \sin kx \rangle} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$$

La serie en seno de Fourier de $f(x)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ es, por tanto, la expansión formal

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

Pero, ¿cuán confiable es esta expansión en series? Para responder a esta pregunta debemos hacer conexión con la teoría usual 2π periódica. Si la serie seno de Fourier fuera exacta para alguna $f(x)$ originalmente definida sólo en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, entonces la periodicidad y el hecho de que las funciones $\sin nx$ son impares nos permitiría definir $\tilde{f}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante las reglas

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ \tilde{f}_i(x) &= -f(-x) \quad \text{para } -\pi \leq x \leq 0 \\ \tilde{f}_i(x+2\pi) &= f(x) \quad \text{para todo } x \end{aligned}$$

(La función \tilde{f}_i así definida cumple $\tilde{f}_i(-x) = -\tilde{f}_i(x)$ para todo x .)

Ahora, la serie de Fourier usual de \tilde{f}_i coincide con la serie de Fourier seno para $f(x)$. Por tanto, si $f \in L^2[0, \pi]$ su serie de Fourier seno converge en el sentido L^2 , pero la cuestión de la convergencia puntual tiene que ser referida a la función $\tilde{f}_i(x)$. Por ejemplo, las condiciones $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ y que $f(x)$ sea Lipschitz continua en $0 \leq x \leq \pi$ son suficientes para dar una serie seno absolutamente convergente. Pero $f(0)$ o $f(\pi) \neq 0$ destruiría este resultado.

Ejemplo 2 La función constante $f(x) = 1$ en $0 \leq x \leq \pi$ tiene $\int_0^\pi 1 \cdot \sin nx \, dx = 0$ para n par y $= 2/n$ para n impar. Por tanto,

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

en el sentido L^2 sobre $0 \leq x \leq \pi$. Pero la función extendida \tilde{f}_i es discontinua en 0 y en π sugiriendo que la serie no es muy buena cerca de estos puntos.

11.2 Series de Fourier Coseno

Proponemos de nuevo el PVFM en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, pero esta vez, con las *condiciones de frontera de Neumann* $\phi'(0) = 0$ y $\phi'(\pi) = 0$. En este caso, las soluciones de

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 \quad \phi'(0) = \phi'(\pi) = 0$$

son $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$. El autovalor de $\phi_n = \cos nx$ es n^2 , en particular $\phi_0 = 1$ tiene autovalor 0. La serie de Fourier coseno de $f(x)$ en $0 \leq x \leq \pi$ es

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

en donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Las autofunciones $\{\cos nx\}$, vistas en todo \mathbb{R} , son 2π periódicas y pares. A partir de $f(x)$, definida en $0 \leq x \leq \pi$, pasamos a definir la extensión par $\tilde{f}_p(x)$ de $f(x)$ por

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ \tilde{f}_p(x) &= f(-x) \quad \text{para } -\pi \leq x \leq 0 \\ \tilde{f}_p(x + 2\pi) &= f(x) \quad \text{para todo } x. \end{aligned}$$

La serie de Fourier 2π periódica usual para \tilde{f}_p , extensión 2π periódica par de la función f , debe coincidir con la serie de Fourier coseno para la función no extendida $f(x)$. Veamos algunos ejemplos físicos.

11.3 Cuerda vibrante

Una cuerda de longitud l tiene sus extremos atados en $x = 0$ y $x = l$. Las ondas viajan por la cuerda a una velocidad $c > 0$. Si $u(x, t)$ representa, en el instante de tiempo t , el desplazamiento vertical del punto de la cuerda que tiene coordenada horizontal x entonces u satisface la ecuación de onda

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t).$$

El dominio de la solución es $0 \leq x \leq l$ y $t \geq 0$. Las condiciones de frontera son

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

El problema consiste en encontrar la función $u(x, t)$ dada las condiciones iniciales arbitrarias

$$u(x, 0) = f(x) \quad u'(x, 0) = g(x).$$

El primer paso consiste en encontrar soluciones particulares de $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u = 0$ usando el método de separación de variables $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$. Estas soluciones especiales sólo ocurren cuando $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$ para alguna constante λ , mientras que $\ddot{\psi}(t) + c^2\lambda\psi(t) = 0$. Las condiciones de frontera fuerzan $\phi(0) = 0$, $\phi(l) = 0$. Por tanto $\phi(x)$ es una autofunción de d^2/dx^2 , que satisface condiciones de frontera de Dirichlet sobre $0 \leq x \leq l$. Se pueden encontrar las autofunciones, pero sería más conveniente trabajar en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. Esto no es ningún problema porque si $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u = 0$, entonces $v(x, t) = u(kx, kt)$ también satisface $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)v = 0$ para cualquier constante $k > 0$.

Sobre el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ las autofunciones son $\phi_n(x) = \sin nx$ para $n = 1, 2, \dots$. La condición $\ddot{\psi}(t) + c^2\lambda\psi(t) = 0$ restringe a $\psi_n(t) = A_n \sin nct + B_n \cos nct$. Por lo tanto, la separación de variables nos ha dado las soluciones particulares $\sin nx \sin nct$ y $\sin nx \cos nct$, que se anulan en $x = 0$ y $x = \pi$.

Con un cambio de variables $x \mapsto s = kx$ y $t \mapsto r = kt$, (con $k = \frac{\pi}{l}$), podemos pensar que el problema se presenta sobre el intervalo $0 \leq s \leq \pi$ en vez del intervalo $0 \leq x \leq l$ y así aprovechamos lo dicho anteriormente. También podemos descomponer el problema en la suma de dos casos como sigue:

Para obtener un desplazamiento inicial $\tilde{f}(s) = f(x)$ (después del cambio de variables) y una velocidad inicial $\tilde{g}(s) = g(x) = 0$ escribimos la serie de

Fourier seno

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} ns$$

y la convertimos en

$$u(s, r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} ns \cos ncr.$$

Para obtener un desplazamiento $\tilde{f}(s) = f(x)$ inicial nulo y una velocidad inicial $\tilde{g}(s) = g(x)$ (después del cambio de variables), hacemos casi la misma cosa

$$\tilde{g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \operatorname{sen} ns$$

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{nc} \operatorname{sen} ns \operatorname{sen} ncr.$$

Finalmente, para volver al intervalo $0 \leq x \leq l$ reemplazamos s por $\pi x/l$ y r por $\pi t/l$ en las fórmulas previas. Finalmente se suman las dos funciones para obtener la solución del problema general.

11.4 Conducción de calor en una barra aislada

Una barra sólida $0 \leq x \leq l$ (de grosor despreciable) tiene sus extremos aislados, de forma tal que no entra ni sale calor por las fronteras. Si $u(x, t)$ representa la temperatura de la barra en el punto x y en el instante de tiempo t , entonces las condiciones de frontera implican que $\lim_{x \rightarrow 0} \partial_x u(x, t) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow l} \partial_x u(x, t) = 0$ para todo tiempo t .

Estas condiciones de frontera se acoplan con la ecuación de calor

$$\partial_t u = a \partial_x^2 u$$

donde $a > 0$ depende de las características térmicas del material de la barra.

La ecuación de calor conduce por sí misma a las soluciones particulares $\phi(x)\psi(t)$ donde

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$$

$$\dot{\psi}(t) + a\lambda\psi(t) = 0$$

Las condiciones de frontera obligan $\phi'(0) = \phi'(l) = 0$, dejándonos, una vez más, frente a un problema de valores de frontera sobre un intervalo finito. El sencillo cambio de variables

$$v(x, t) = u(kx, k^2t)$$

nos permite trabajar sobre el intervalo, más conveniente, $0 \leq x \leq \pi$. El problema de autovalores

$$\begin{aligned}\phi''(x) + \lambda\phi(x) &= 0 \\ \phi'(0) &= 0 \\ \phi'(\pi) &= 0\end{aligned}$$

nos conduce directamente a $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ y por tanto a las soluciones de la ecuación de calor

$$\{1, \cos x e^{-at}, \cos 2x e^{-4at}, \cos 3x e^{-9at}, \dots\}$$

Cualquier condición inicial dada $u(x, 0) = f(x)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ puede expandirse en una serie de Fourier coseno

$$f(x) = c_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

después de lo cual, la solución de la ecuación de calor se escribe como

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx e^{-an^2t}.$$

Finalmente, para transformar este resultado a una solución que satisfaga las condiciones de frontera de Neumann en $x = 0$ y $x = l$, usamos el cambio de variables de arriba y llegamos a

$$v(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{l} \right) e^{-an^2\pi^2 t/l^2}.$$

11.5 Problema de Dirichlet sobre el disco unitario

En el plano (x, y) el círculo unitario es $S^1 : x^2 + y^2 = 1$ y el disco unitario es $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Dado $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ buscamos la función $u : D \rightarrow \mathbb{R}$

con $u \in C^\infty$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y $\lim_{r \rightarrow 1} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. La teoría de variable compleja nos dice que las partes real e imaginaria de $(x + iy)^n = r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta$ son funciones armónicas. Así sólo basta con que desarrollemos $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ en su serie 2π periódica de Fourier usual

$$f(\cos \theta, \sin \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

porque a partir de este desarrollo encontramos la función armónica $u(x, t)$ buscada, haciendo

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

Un buen ejercicio es tomar la función $f(x, y) = x^3$, restringirla a $x^2 + y^2 = 1$ y encontrar $u(x, t)$, usando este procedimiento.

Ejercicios

- En la frontera del disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ se mantiene una temperatura $u(x, y) = 1$ para $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, mientras que $u(x, y) = -1$ para $x^2 + y^2 = 1$, $x < 0$. En el interior $x^2 + y^2 < 1$ se cumple la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
 - Grafique $u(\cos \theta, \sin \theta)$ sobre $-\pi < \theta < \pi$ y obtenga su serie de Fourier en senos y cosenos.
 - Obtenga una fórmula explícita para la temperatura a lo largo del eje x , es decir, para $u(x, 0)$.
- Una barra $0 \leq x \leq \pi$ tiene temperatura $u = 1$ cuando $t = 0$, pero los extremos $x = 0$ y $x = \pi$ se mantienen a temperatura $u = 0$ para todo $t > 0$. La temperatura $u(x, t)$ cumple $u_t = u_{xx}$ en todo $t > 0$ y $-\pi < x < \pi$.
 - Determine $u(x, t)$ por el método de separación de variables y la serie en seno de Fourier.
 - Examine la temperatura en el punto central $\pi/2$, y compruebe que

$$\frac{4}{\pi} e^{-t} > u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) > \frac{4}{\pi} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-9t} \right), \text{ para todo } t > 0.$$

- (c) Deduzca el valor numérico de la serie infinita $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
3. El desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda tensa sobre $0 \leq x \leq \pi$ cumple $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, y $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ si los extremos están fijos. La velocidad inicial $\partial_t u(x, t)|_{t=0}$ es cero, y el desplazamiento inicial se da por

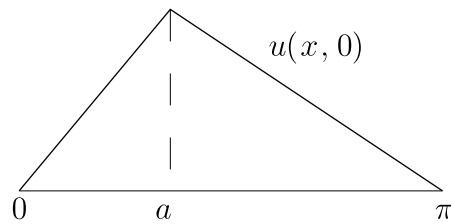


Figura 11.1

Explique cómo elegir $0 < a < \pi$ de modo de suprimir totalmente aquella frecuencia que es seis veces la frecuencia fundamental.

4. La temperatura $u(x, t)$ en una barra $0 \leq x \leq \pi/2$, además de cumplir $u_t = u_{xx}$, tiene su extremo $x = 0$ a temperatura cero siempre, mientras que $x = \pi/2$ está aislada térmicamente, es decir, $\partial_x u(x, t)|_{x=\pi/2} = 0$ para todo $t > 0$. Halle la temperatura $u(x, t)$ si su valor inicial $u(x, 0) = 1$ en $0 \leq x \leq \pi/2$.

Capítulo 12

Sturm-Liouville

El operador diferencial fundamental para nuestros propósitos es el operador de Laplace en \mathbb{R}^n

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$$

que opera sobre funciones $u(x_1, \dots, x_n)$ que dependen de n variables independientes. Veremos como Δu se simplifica cuando u , en el fondo, es función de una sola variable.

12.1 Operador de Laplace para funciones radiales

Supongamos que $\phi(\mathbf{x})$ es un campo escalar dado en \mathbb{R}^n y deseamos calcular el Laplaciano de la función $u(\mathbf{x}) = f(\phi(\mathbf{x}))$, en donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de una sola variable real. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\partial_{x_k} u(\mathbf{x}) &= f'(\phi(\mathbf{x})) \partial_{x_k} \phi(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_k}^2 u(\mathbf{x}) &= f''(\phi(\mathbf{x})) \left(\partial_{x_k} \phi(\mathbf{x}) \right)^2 + f'(\phi(\mathbf{x})) \partial_{x_k}^2 \phi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

De manera que $\Delta u(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})f''(\phi(\mathbf{x})) + B(\mathbf{x})f'(\phi(\mathbf{x}))$ donde

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \left(\partial_{x_k} \phi(\mathbf{x}) \right)^2$$

y

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2 \phi(\mathbf{x}) = \Delta \phi(\mathbf{x})$$

Si tomamos $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, obtenemos $u(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|)$. De esta forma, $u(\mathbf{x})$ es un campo escalar radial cuyo valor en \mathbb{R}^n depende sólo de la distancia del punto \mathbf{x} al origen. Las primeras y segundas derivadas parciales de $\|\mathbf{x}\|$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} \|\mathbf{x}\| &= \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|} \\ \partial_{x_k}^2 \|\mathbf{x}\| &= \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^3} \end{aligned}$$

En este caso tenemos que $A(\mathbf{x}) = 1$ y $B(\mathbf{x}) = (n-1)/\|\mathbf{x}\|$ y por lo tanto

$$\Delta f(\|\mathbf{x}\|) = f''(\|\mathbf{x}\|) + \frac{n-1}{\|\mathbf{x}\|} f'(\|\mathbf{x}\|)$$

Esta fórmula nos dice cómo calcular el Laplaciano de una función radial. Observamos que su Laplaciano también es una función radial. Hemos encontrado que $\Delta f(\|\mathbf{x}\|) = g(\|\mathbf{x}\|)$ donde $g(r)$ se obtiene a partir de $f(r)$ por la relación

$$g(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$$

12.2 La ecuación de calor

La ecuación $\Delta u = 0$ es justamente la ecuación que aparece cuando uno quiere encontrar la distribución de temperatura *estacionaria* $u(\mathbf{x})$ en un sólido, por ejemplo un cascarón esférico en \mathbb{R}^3 : $0 < a \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq b$. Esta distribución de temperatura está gobernada por la ecuación de calor $\partial_t u = \Delta u$. El que la temperatura sea estacionaria nos dice que u no depende de t y la ecuación se reduce a la ecuación de Laplace $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$, $a \leq \|\mathbf{x}\| \leq b$. Supongamos que las temperaturas en la superficie interna $\|\mathbf{x}\| = a$ y en la superficie externa $\|\mathbf{x}\| = b$ son constantes y valen T_a y T_b respectivamente.

La simetría del problema nos sugiere que la solución $u(\mathbf{x})$ sea una función radial, esto es $u(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|) = f(r)$. Para encontrar $f(r)$ debemos resolver el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned} f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) &= 0 \\ f(a) = T_a \quad f(b) &= T_b \end{aligned}$$

La solución general de $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$ es $f(r) = C/r + D$. Las constantes C y D se expresan en términos de T_a y T_b al sustituir las condiciones de frontera en $f(r)$.

Condiciones de frontera más generales pueden ocurrir si consideramos que la frontera del cascarón está aislada o por el contrario está en contacto con algún tipo de fuente de calor. En estos casos, se obtienen condiciones de frontera de la forma

$$\begin{aligned} A_0 f(a) + A_1 f'(a) &= \alpha \\ B_0 f(b) + B_1 f'(b) &= \beta \end{aligned}$$

en donde $A_0^2 + A_1^2 > 0$ y $B_0^2 + B_1^2 > 0$.

Regresemos al problema de calor en el cascarón esférico y tratemos de dar respuesta a esta pregunta, un poco más difícil: Supongamos que mantenemos fijas las temperaturas de la esfera interna y la esfera externa del cascarón a T_a y T_b respectivamente. ¿Cuál es la distribución de temperatura $v(\mathbf{x}, t)$ que depende del tiempo, si la temperatura inicial $v(\mathbf{x}, 0)$ es alguna función radial $h(\|\mathbf{x}\|)$?

En concreto, lo que estamos buscando es una función v , que dependa de cuatro variables (x_1, x_2, x_3, t) que cumpla con

1. v está definida en el subconjunto de \mathbb{R}^{3+1} dado por $a \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq b$ y $0 \leq t$.
2. v satisface la ecuación homogénea de calor

$$\partial_t v = \Delta v \quad \text{donde} \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$$

3. v satisface la condición inicial

$$v(\mathbf{x}, 0) = h\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$$

4. v satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= T_a \text{ si } \|\mathbf{x}\| = a \\ v(\mathbf{x}, t) &= T_b \text{ si } \|\mathbf{x}\| = b \end{aligned}$$

La respuesta $v(\mathbf{x}, t)$ debe estar determinada, de alguna manera, por las condiciones impuestas por h , T_a y T_b . Es plausible suponer que la temperatura dentro del cascarón se estabilice, luego de que haya transcurrido un lapso de tiempo suficientemente largo. Siendo esto así, el problema se reduce a la situación que acabamos de considerar. Sea $v_\infty(\mathbf{x}) = C/||\mathbf{x}|| + D$ el campo escalar en \mathbb{R}^3 que cumple con $\Delta v_\infty(\mathbf{x}) = 0$ y $v_\infty(\mathbf{x}) = T_a$ si $||\mathbf{x}|| = a$, $v_\infty(\mathbf{x}) = T_b$ si $||\mathbf{x}|| = b$. La solución $v(\mathbf{x}, t)$ que buscamos se aproxima a $v_\infty(\mathbf{x})$ cuando t tiende a infinito. Usando el principio de superposición podemos escribir $v(\mathbf{x}, t)$ como

$$v(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t) + v_\infty(\mathbf{x})$$

La función $w(\mathbf{x}, t)$ se llama la temperatura transitoria. Para hallar w debemos resolver la ecuación $\partial_t w = \Delta w$ junto con la condición inicial $w(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}, 0) - v_\infty(\mathbf{x})$, es decir

$$w(\mathbf{x}, 0) = h(||\mathbf{x}||) - \frac{C}{||\mathbf{x}||} - D = g(||\mathbf{x}||),$$

y la condición de frontera $w(\mathbf{x}, t) = 0$ si $||\mathbf{x}|| = a$ o $||\mathbf{x}|| = b$.

El principio de separación de variables nos dice que si X es un campo escalar en \mathbb{R}^3 , que satisface la ecuación $\Delta X + \lambda X = 0$ y $T(t)$ es una función que satisface la ecuación $T'(t) + \beta T(t) = 0$, en donde λ y β son constantes, entonces

$$(\partial_t - \Delta)(X(\mathbf{x})T(t)) + (\beta - \lambda)X(\mathbf{x})T(t) = 0$$

Si tomamos $\lambda = \beta$ obtenemos $\partial_t(X(\mathbf{x})T(t)) = \Delta(X(\mathbf{x})T(t))$. Las soluciones para $T(t)$ son de la forma $T(t) = e^{-\lambda t}$. ¿Qué forma debe tener X ? La simetría del problema nos sugiere, nuevamente, que la función $X(\mathbf{x})$ sólo debe depender de la distancia del punto \mathbf{x} al origen. Más aún, X debe satisfacer $X(\mathbf{x}) = 0$ si $||\mathbf{x}|| = a$ o $||\mathbf{x}|| = b$.

Escribamos entonces $X(\mathbf{x}) = \phi(||\mathbf{x}||)$. Nuestro problema se ha reducido ahora a encontrar todas las autofunciones radiales del Laplaciano que satisfagan las condiciones de frontera dadas. Nos planteamos entonces el siguiente problema: encontrar todas las funciones $\phi(r)$ y constantes λ que satisfagan

$$\begin{aligned} \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) + \lambda\phi(r) &= 0 \\ \phi(a) &= 0, \quad \phi(b) = 0. \end{aligned}$$

La teoría general nos dice que la solución a este problema consiste de una secuencia de autofunciones $\phi_1(r), \phi_2(r), \dots$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. La n -ésima autofunción $\phi_n(r)$ se incorpora como parte de la solución de la ecuación de calor por medio de la función

$$w_n(\mathbf{x}, t) = \phi_n(\|\mathbf{x}\|)e^{-\lambda_n t}$$

Esta solución satisface las condiciones de frontera homogéneas, pero tiene por valor inicial $w_n(\mathbf{x}, 0) = \phi_n(\|\mathbf{x}\|)$.

El segundo y último paso consiste en representar la condición inicial $g(r)$ como una serie infinita de autofunciones

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(r),$$

de donde podemos expresar la solución $w(\mathbf{x}, t)$ como la siguiente serie infinita

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(\|\mathbf{x}\|)e^{-\lambda_n t}.$$

La validez y la aplicabilidad de este procedimiento fueron extensamente estudiados en el siglo XIX. Para nuestro problema particular, un pequeño cambio de variable nos permite encontrar las autofunciones directamente. Si $\phi(r) = \psi(r)/r$ entonces

$$\phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) = \frac{\psi''(r)}{r}$$

(verifíquelo). Entonces con $X(\mathbf{x}) = \psi(\|\mathbf{x}\|)/\|\mathbf{x}\|$ tenemos que

$$\Delta X + \lambda X = 0 \text{ si } \psi''(r) + \lambda\psi(r) = 0.$$

Junto con las condiciones $\psi(a) = \psi(b) = 0$ encontramos que

$$\psi_n(r) = \text{sen}\left(\frac{r-a}{b-a} n \pi\right)$$

y que

$$\lambda_n = \frac{n^2}{(b-a)^2}$$

con $n = 1, 2, \dots$

El cálculo de los coeficientes c_n y la convergencia de la serie resultante se pueden estudiar como un caso especial de series de Fourier. Si tratamos de resolver un problema diferente, puede ocurrir que las autofunciones no sean tan fáciles de calcular, y por esto necesitamos una teoría general. En la literatura matemática esta teoría lleva el nombre de *problemas de Sturm-Liouville*.

12.3 Problema de Sturm-Liouville

El enunciado es el siguiente:

a) Encontrar todas las autofunciones $\phi_n(x)$ junto con los autovalores asociados λ_n que satisfagan

$$\begin{aligned}k(x)\phi_n'' + l(x)\phi_n' + (m(x) + \lambda_n)\phi_n &= 0, \\A_0\phi_n(a) + A_1\phi_n'(a) &= 0, \\B_0\phi_n(b) + B_1\phi_n'(b) &= 0.\end{aligned}$$

b) Desarrollar funciones arbitrarias $g(x)$ en series infinitas de autofunciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

En los libros de texto vemos la ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville

$$(p(x)\phi'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))\phi(x) = 0.$$

En realidad, cualquier ecuación de la forma

$$k(x)\phi_n'' + l(x)\phi_n' + (m(x) + \lambda_n)\phi_n = 0 \tag{1}$$

con $k(x) \neq 0$ puede ponerse en la forma de Sturm-Liouville si la multiplicamos por una función $r(x)$ de forma tal que se cumpla $(r(x)k(x))' = r(x)l(x)$. Entonces

$$rk\phi'' + rl\phi' + (rm + \lambda r)\phi = (p\phi')' + (q + \lambda r)\phi$$

en donde $rk\phi'' + rl\phi' = (p\phi')'$, $p = rk$ y $q = rm$. La ventaja de escribir la ecuación de segundo grado (1) en la forma de Sturm-Liouville es que las autofunciones son ortogonales con respecto a la *función de peso* $r(x)$. Veamos este hecho con más detalle.

Si $\phi_m(x)$ y $\phi_n(x)$ son autofunciones con autovalores distintos λ_m y λ_n , se tiene que

$$\begin{aligned} (p\phi_m'' + p'\phi_m' + (q + \lambda_m r)\phi_m)\phi_n &= 0 \\ (p\phi_n'' + p'\phi_n' + (q + \lambda_n r)\phi_n)\phi_m &= 0 \end{aligned}$$

Restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} p(\phi_m''\phi_n - \phi_n''\phi_m) + p'(\phi_m'\phi_n - \phi_n'\phi_m) + (\lambda_m - \lambda_n)r\phi_m\phi_n &= 0 \\ (p(\phi_m'\phi_n - \phi_n'\phi_m))' &= (\lambda_n - \lambda_m)r\phi_m\phi_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r(x)\phi_m(x)\phi_n(x) dx = p(x)(\phi_m'(x)\phi_n(x) - \phi_n'(x)\phi_m(x)) \Big|_a^b.$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} A_0\phi_m(a) + A_1\phi_m'(a) &= 0 \\ A_0\phi_n(a) + A_1\phi_n'(a) &= 0 \\ \text{y} \quad A_0^2 + A_1^2 &> 0 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_m(a) & \phi_m'(a) \\ \phi_n(a) & \phi_n'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Análogamente,

$$\det \begin{pmatrix} \phi_m(b) & \phi_m'(b) \\ \phi_n(b) & \phi_n'(b) \end{pmatrix} = 0.$$

Por tanto, concluimos que $\int_a^b r(x)\phi_m(x)\phi_n(x) dx = 0$.

De manera que las autofunciones son ortogonales sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ si usamos a $r(x)$ como función de peso y el producto interno $\langle \phi, \psi \rangle$ de dos funciones continuas se define por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_a^b r(x)\phi(x)\overline{\psi(x)} dx.$$

Esto hace posible que podamos encontrar los coeficientes c_n de cualquier expansión en autofunciones

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

12.4 Laplaciano en coordenadas polares

Regresemos ahora a la ecuación $\Delta u + \lambda u = 0$ en \mathbb{R}^n . Hemos estudiado como actúa el operador de Laplace sobre funciones radiales $u(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$ de esta ecuación. De alguna manera, el concepto opuesto al de funciones radiales es el de una función homogénea, es decir, una función $w(x_1, \dots, x_n)$ que cumple que $w(t\mathbf{x}) = t^m w(\mathbf{x})$, para todo $t > 0$. La cantidad m es el orden de la homogeneidad de la función $w(\mathbf{x})$. Si $u(x)$ es una función radial y $w(x)$ es una función homogénea de orden cero, se tiene que

$$\Delta(uw) = u \Delta w + w \Delta u$$

ya que el término $2 \sum_{k=1}^n \partial_k u \partial_k w$ desaparece debido a que

$$\partial_{x_k} u = f'(\|\mathbf{x}\|) \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n x_k \partial_{x_k} w = 0$$

Ahora pasamos a estudiar el operador Laplaciano $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en el plano \mathbb{R}^2 . Un punto natural de partida viene dado por los *armónicos esféricos de grado m* , es decir los polinomios en dos variables $P_m(x, y)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2) P_m(x, y) &= 0 \\ (x \partial_x + y \partial_y) P_m(x, y) &= m P_m(x, y) \end{aligned}$$

La segunda ecuación es equivalente a la condición

$$P_m(tx, ty) = t^m P_m(x, y)$$

Una base para los armónicos esféricos de grado m en el plano \mathbb{R}^2 viene dada por las funciones parte real y parte imaginaria de $(x + iy)^m$. Por ejemplo, $x^2 - y^2$ y $2xy$ forman una base de los armónicos esféricos homogéneos de grado 2. Si usamos coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, tenemos que

$$(x + iy)^m = (r e^{i\theta})^m = r^m e^{im\theta} = r^m \cos m\theta + i r^m \sin m\theta$$

Evidentemente, $r^m = \|\mathbf{x}\|^m$ es una función radial, mientras que $e^{im\theta}$ vista como función de x e y es una función homogénea de grado cero. Entonces se tiene que

$$\Delta((x + iy)^m) = (\Delta r^m) e^{im\theta} + r^m \Delta(e^{im\theta})$$

Recordemos que el Laplaciano de funciones radiales se calcula con el operador $d^2/dr^2 + (n-1)/r d/dr$. Si $n = 2$ esta se reduce a $d^2/dr^2 + (1/r) d/dr$. De manera que $\Delta r^m = m^2 r^{m-2}$. Como $x + iy$ es analítica, $\Delta((x + iy)^m) = 0$ y por lo tanto,

$$0 = m^2 r^{m-2} e^{im\theta} + r^m \Delta(e^{im\theta})$$

de donde se concluye que

$$\Delta(e^{im\theta}) = -\frac{m^2}{r^2} e^{im\theta}$$

Esta fórmula nos dice cómo calcular el Laplaciano de ciertas funciones homogéneas de grado cero.

Finalmente, podemos considerar el caso de un campo escalar en \mathbb{R}^2 que tiene la forma $u(x, y) = f(r)e^{im\theta}$.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta(f(r))e^{im\theta} + f(r) \Delta(e^{im\theta}) \\ &= (f''(r) + \frac{1}{r}f'(r))e^{im\theta} + f(r)(-\frac{m^2}{r^2})e^{im\theta} \\ &= (f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{m^2}{r^2}f(r))e^{im\theta} \end{aligned}$$

12.5 Ecuación de Bessel

La ecuación de autovalores para el laplaciano $\Delta u + \lambda u = 0$ en coordenadas polares (dim=2) toma la forma

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + (\lambda - \frac{m^2}{r^2})f(r) = 0$$

cuando $u(x, y) = f(r)e^{im\theta}$. Esta es una ecuación de Sturm-Liouville que puede ser escrita en la forma usual

$$(rf'(r))' + (\lambda r - \frac{m^2}{r})f(r) = 0$$

sobre algún intervalo $a < r < b$. Este problema se llama singular porque $1/r$ es singular en $r = 0$. Si escribimos $f(r) = J(\mu r)$ con $\mu^2 = \lambda$ encontramos que

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + (1 - \frac{m^2}{s^2})J(s) = 0,$$

es la misma ecuación de antes pero con el autovalor λ igual a 1. Hemos llegado a la *ecuación de Bessel de orden m* :

$$s^2 J''(s) + sJ'(s) + (s^2 - m^2)J(s) = 0.$$

Estamos interesados en las soluciones de esta ecuación porque un campo escalar

$$u(x, y) = J(\mu r)e^{im\theta}$$

satisface la ecuación de autovalores (o ecuación de onda reducida) $\Delta u + \mu^2 u = 0$ si y sólo si la función de una sola variable $J(s)$ satisface la ecuación de Bessel.

En el próximo capítulo se dará una construcción directa de las funciones de Bessel de orden entero $J_m(r)$, que junto con las *funciones de Neumann* $Y_m(r)$, forman una base de soluciones para la ecuación de Bessel.

Ejercicios

1. Sea $u(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ un campo escalar que cumple con la identidad

$$u(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = u(x, y)$$

para todo x, y, θ . Verifique que u es radial.

2. Un campo escalar $u(x_1, x_2, x_3, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{3+1})$ es una onda esférica en \mathbb{R}^3 con velocidad $c > 0$ si cumple

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

y tiene la forma $u = f(|\mathbf{x}|)e^{i\omega t}$ donde $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Encuentre todas las ondas que se describen de esta manera y son finitas en $\mathbf{x} = 0$.

3. Al problema anterior le agregamos la condición de borde $d/dr f(r)|_{r=R} = 0$, es decir, consideramos ondas acústicas en la cavidad $|\mathbf{x}| \leq R$. Dados R y $c > 0$ encuentre cuál es la frecuencia mínima ω .
4. En \mathbb{R}^3 las funciones

$$\phi_n(x_1, x_2, x_3) = \frac{\text{sen}(n\pi|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

cumplen con $\Delta \phi_n + \pi^2 n^2 \phi_n = 0$, y $\phi_n(\mathbf{x}) = 0$ sobre la esfera unitaria $|\mathbf{x}| = 1$.

- (a) Verifique directamente que $\int_{x \in B} \phi_n \phi_m d^3 x = 0$ donde B es la bola unitaria $|\mathbf{x}| \leq 1$. Use coordenadas esféricas.
- (b) Halle la serie de Fourier seno para

$$f(r) = r = a_1 \operatorname{sen} r + a_2 \operatorname{sen} 2r + \dots$$

sobre el intervalo $0 \leq r \leq \pi$.

- (c) Mediante cambios de variables, obtenga los coeficientes de la serie

$$g(x_1, x_2, x_3) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x_1, x_2, x_3)$$

sobre la bola unitaria $B \in \mathbb{R}^3$.

Capítulo 13

Funciones de Bessel

En este capítulo, vamos a construir las funciones de Bessel y estudiar sus propiedades. También veremos como estas funciones nos ayudan a resolver la ecuación de onda, de calor y de Laplace cuando se usa separación de variables y el problema se plantea en coordenadas polares.

13.1 Construcción de las funciones de Bessel

Cuando uno quiere resolver una de las tres ecuaciones antes mencionadas usando separación de variables, uno termina mirando el problema siguiente: encontrar las autofunciones del operador de Laplace

$$\Delta \phi + \lambda \phi = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \lambda \phi = 0, \quad (13.1)$$

donde usualmente, λ es una constante positiva. En estos casos, uno siempre puede hacer un cambio de variables $(x, y) \mapsto (\mu x, \mu y)$ con $\mu^2 = \lambda$ para reescribir la ecuación 13.1 en la forma

$$\Delta \phi + \phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \mathbb{I})\phi = 0, \quad (13.2)$$

Siendo esto así, vamos a concentrarnos en buscar autofunciones del operador de Laplace con autovalor 1. Podemos comenzar buscando soluciones que dependan de una sola variable. Por ejemplo la función $\phi(x, y) = e^{ix}$ es una solución para nuestro problema, lo mismo que $\phi(x, y) = e^{iy}$. Si bien el producto de estas dos funciones es una autofunción del operador de Laplace, el autovalor no es 1. Podemos probar con $\phi(x, y) = e^{isx}e^{icy} = e^{i(sx+cy)}$. En

este caso el Laplaciano de ϕ es

$$\Delta \phi(x, y) = -(s^2 + c^2)\phi(x, y).$$

Eligiendo las constantes s y c de forma tal que $s^2 + c^2 = 1$ habremos generado una solución para 13.2. Observando que para cualquier número $\omega \in \mathbb{R}$, $\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$ encontramos que las funciones

$$\phi(x, y) = e^{i(x \sin \omega + y \cos \omega)}$$

son, cada una de ellas, solución de nuestro problema. Por lo pronto hemos obtenido toda una familia de autofunciones del operador de Laplace con autovalor 1. Una solución se puede obtener de otra rotando los ejes coordenados. Podemos ir más lejos aun y tomar el promedio en esta familia de funciones para encontrar

$$\phi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \omega + y \cos \omega)} d\omega. \quad (13.3)$$

Una vez más, $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 1)\phi_0(x, y) = 0$ tal y como puede verificarse derivando bajo el signo de integración. Pasando a coordenadas polares (con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$) encontramos que

$$\begin{aligned} \phi_0(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(r \cos \theta \sin \omega + r \sin \theta \cos \omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \sin(\theta + \omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{2\pi + \theta} e^{ir \sin \omega} d\omega. \end{aligned}$$

Como la función $\omega \mapsto e^{ir \sin \omega}$ es 2π periódica, el valor de la integral no depende de θ . Por tanto

$$\phi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \sin \omega} d\omega. \quad (13.4)$$

Por todo esto, definimos la *función de Bessel de orden 0* a través de la integral

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \sin \omega} d\omega.$$

De la discusión anterior deducimos que

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 1)J_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0,$$

de modo que $J_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ es una función radial que resuelve la ecuación 13.2.

Usando estas mismas ideas, podemos encontrar autofunciones del operador de Laplace con autovalor 1 que no sólo dependen de r sino que también dependen del ángulo θ . En vez de tomar el promedio como en la ecuación 13.3 podemos tomar promedios pesados. Para n , un número entero consideremos la función de peso $e^{-in\omega}$ y pongamos

$$\phi_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{i(x \sin \omega + y \cos \omega)} d\omega.$$

Igual que con la función ϕ_0 , cada una de estas funciones es autofunción del operador de Laplace con autovalor 1. Pasando a coordenadas polares encontramos

$$\begin{aligned} \phi_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{i(r \cos \theta \sin \omega + r \sin \theta \cos \omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{ir \sin(\theta + \omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{2\pi + \theta} e^{-in(\omega - \theta)} e^{ir \sin \omega} d\omega \\ &= e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{2\pi + \theta} e^{-in\omega} e^{ir \sin \omega} d\omega. \end{aligned}$$

Igual que antes, el integrando es una función 2π periódica. Por lo tanto,

$$\phi_n(x, y) = e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{ir \sin \omega} d\omega. \quad (13.5)$$

Definimos la *función de Bessel de orden n* a través de la integral

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{ir \sin \omega} d\omega, \quad (13.6)$$

en término de la cual tenemos

$$\phi_n(x, y) = J_n(r) e^{in\theta} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Con esto hemos concluido nuestro objetivo. Para cada n la función ϕ_n es una autofunción del operador de Laplace con autovalor 1. Para n distinto de cero, ϕ_n se escribe como el producto de una función radial ($J_n(r)$) por una función que sólo depende del ángulo ($e^{in\theta}$).

13.2 Propiedades de las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel tienen una enorme cantidad de propiedades. Discutirlas todas tomaría varios volúmenes como el presente texto. Aquí sólo vamos a mencionar algunas que serán de utilidad en la resolución de ecuaciones que aparecen en la física matemática. Todas ellas se pueden deducir de la definición

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\omega} e^{ir \sin \omega} d\omega. \quad (13.7)$$

1. Las funciones de Bessel satisfacen la ecuación diferencial

$$\left(r J_n'(r)\right)' + \left(r - \frac{n^2}{r}\right) J_n(r) = 0. \quad (13.8)$$

En efecto, las funciones $\phi_n(x, y) = J_n(r)e^{in\theta}$ satisfacen la ecuación $\Delta \phi_n + \phi_n = 0$. Por lo que se dijo en el capítulo anterior, la ecuación 13.8, no es otra cosa que “la parte radial” de esta ecuación de autofunciones.

2. Las funciones de Bessel son los coeficientes de Fourier de la función $e^{ir \sin \omega}$.

Como se mencionó más arriba, cuando r mantiene un valor constante, la función $e^{ir \sin \omega}$ es una función 2π periódica. La ecuación 13.7 nos dice quienes son los coeficientes de Fourier de esta función. En consecuencia, su desarrollo en series es

$$e^{ir \sin \omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in\omega}.$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *ecuación generatriz* para las funciones de Bessel de orden entero. A la función $e^{ir \sin \omega}$ la llamaremos *función generatriz* de las funciones de Bessel.

3. Las funciones de Bessel son funciones reales.

Para ver que esto es así, observamos que la función generatriz $G(r, \omega) = e^{ir \sin \omega}$ cumple con $G(r, -\omega) = e^{ir \sin(-\omega)} = e^{-ir \sin \omega} = \overline{G(r, \omega)}$. Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{-in\omega} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{J_n(r)} e^{-in\omega}.$$

Por la unicidad de los coeficientes de Fourier concluimos que $\bar{J}_n = J_n$. En la figura 13.1 presentamos los gráficos de alguna de las funciones de Bessel.

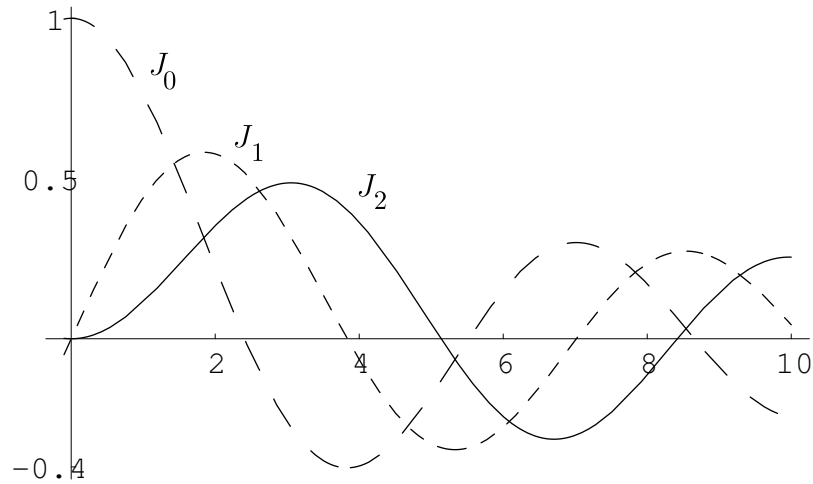


Figura 13.1

Todas las funciones de Bessel tienen un comportamiento similar: el gráfico de cada una de estas funciones oscila amortiguadamente en torno al eje horizontal. De hecho, cuando $r \gg 0$ se tiene que¹

$$J_n(r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\pi - r\right).$$

Cada una de las funciones J_n se anula en un conjunto infinito (discreto) de puntos. En lo que sigue, al m -ésimo punto de \mathbb{R} , donde la función de Bessel de orden n se anula lo denotaremos con α_{nm} . La siguiente tabla corresponde a los primeros ceros de las funciones J_0 , J_1 y J_2 :

	J_0	J_1	J_2
α_{n1}	2.40483	3.83171	5.13562
α_{n2}	5.52008	7.01559	8.41724
α_{n3}	8.65373	10.1735	11.6198
α_{n4}	11.7915	13.3237	14.796
α_{n5}	14.9309	16.4706	17.9598
α_{n6}	18.0711	19.6159	21.117

¹La deducción de este resultado es largo y aquí no lo presentamos

4. Así como las funciones trigonométricas satisfacen $\cos'(t) = -\sin(t)$ y $\sin'(t) = \cos(t)$ también existen ecuaciones que relacionan a las funciones de Bessel con sus derivadas. Estas ecuaciones se llaman *relaciones de recurrencia* entre las funciones de Bessel. Para establecer estas relaciones comencemos observando que el operador de Laplace en \mathbb{R}^2 se puede factorizar como

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y).$$

Al operador $S = (\partial_x + i\partial_y)$ lo llamaremos el operador de subida y al operador $B = (\partial_x - i\partial_y)$ el de bajada. (Estos operadores aparecen en ciertos cálculos en mecánica cuántica y sus nombres provienen de ahí.)

Estos dos operadores conmutan con el operador de Laplace. Esto quiere decir que si $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que tiene derivadas continuas hasta de orden 3 por lo menos, entonces $\Delta(Su) = S(\Delta u)$ y $\Delta(Bu) = B(\Delta u)$. Como consecuencia de esto tenemos que si u es una autofunción del operador de Laplace entonces Su y Bu son autofunciones también.

Para nuestros propósitos, necesitamos describir estos operadores en coordenadas polares. La regla de la cadena nos dice que

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_x r \partial_r + \partial_x \theta \partial_\theta = \frac{x}{r} \partial_r - \frac{y}{r^2} \partial_\theta \\ &= \cos \theta \partial_r - \frac{\text{sen } \theta}{r} \partial_\theta. \end{aligned}$$

De manera similar, encontramos que

$$\partial_y = \text{sen } \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta.$$

De modo que

$$\begin{aligned} S &= \partial_x + i\partial_y = e^{i\theta} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta \right), \\ B &= \partial_x - i\partial_y = e^{-i\theta} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta \right). \end{aligned}$$

Si $u(r, \theta) = f(r)e^{in\theta}$ encontramos que

$$\begin{aligned} S u(r, \theta) &= \left(f'(r) - \frac{n}{r}f(r)\right)e^{i(n+1)\theta}, \\ B u(r, \theta) &= \left(f'(r) + \frac{n}{r}f(r)\right)e^{i(n-1)\theta}. \end{aligned}$$

Para la función generatriz de las funciones de Bessel $e^{ir \operatorname{sen} \theta} = e^{iy}$ tenemos

$$S e^{iy} = -e^{iy} \quad \text{y} \quad B e^{iy} = e^{iy}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} e^{ir \operatorname{sen} \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta}, \\ S e^{ir \operatorname{sen} \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(J'_n(r) - \frac{n}{r}J_n(r)\right)e^{i(n+1)\theta}, \\ B e^{ir \operatorname{sen} \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(J'_n(r) + \frac{n}{r}J_n(r)\right)e^{i(n-1)\theta}. \end{aligned}$$

Por la unicidad de los coeficientes de Fourier, deducimos las fórmulas de recurrencia

$$J_{n+1}(r) = \frac{n}{r}J_n(r) - J'_n(r) \quad (13.9)$$

$$J_{n-1}(r) = \frac{n}{r}J_n(r) + J'_n(r) \quad (13.10)$$

En particular, para $n = 0$ obtenemos $J_1(r) = -J'_0(r)$ y $J_{-1}(r) = J'_0(r)$.

Con esto terminamos el estudio de las propiedades de las funciones de Bessel.

13.3 Integración de las funciones de Bessel

Consideremos las funciones

$$\psi_{nm}(x, y) = \phi_n(x \alpha_{nm}/a, y \alpha_{nm}/a) = J_n \left(\frac{r \alpha_{nm}}{a} \right) e^{in\theta}.$$

donde las funciones ϕ_n son las encontradas en la ecuación 13.5, α_{nm} es el m -ésimo cero de la función de Bessel de orden n y a es un número real

positivo. Estas funciones forman un conjunto ortogonal de funciones en el disco $D = \sqrt{x^2 + y^2} < a$. Para ver que esto es así, observemos que estas funciones satisfacen

$$\Delta \psi_{nm} + (\alpha_{nm}/a)^2 \psi_{nm} = 0$$

y

$$\psi_{nm}(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = 0.$$

Estas ecuaciones siguen siendo válidas si sustituimos ψ_{nm} por su compleja conjugada $\bar{\psi}_{nm}$. La identidad de Green nos dice que si u y w son funciones de clase C^2 en \mathbb{R}^2 entonces

$$\nabla \cdot (w \nabla u - u \nabla w) = w \Delta u - u \Delta w \quad (13.11)$$

Si $u = \psi_{nm}$ y $w = \psi_{\tilde{n}\tilde{m}}$ tenemos que

$$\iint_D (\psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \Delta \psi_{nm} - \psi_{nm} \Delta \psi_{\tilde{n}\tilde{m}}) dx dy = \frac{\alpha_{\tilde{n}\tilde{m}}^2 - \alpha_{nm}^2}{a^2} \iint_D \psi_{nm} \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} dx dy$$

Usando el teorema de la divergencia se sigue que

$$\frac{\alpha_{\tilde{n}\tilde{m}}^2 - \alpha_{nm}^2}{a^2} \iint_D \psi_{nm} \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} dx dy = \int_C \mathbf{x} \cdot (\psi_{\tilde{n}\tilde{m}} \nabla \psi_{nm} - \psi_{nm} \nabla \psi_{\tilde{n}\tilde{m}}) dt$$

donde C es la curva parametrizada por $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t)$. Como las funciones ψ_{nm} se anulan sobre C el lado derecho de la ecuación es idénticamente igual a cero. Por tanto

$$(\alpha_{\tilde{n}\tilde{m}}^2 - \alpha_{nm}^2) \iint_D \psi_{nm} \psi_{\tilde{n}\tilde{m}} dx dy = 0$$

Si $\alpha_{nm} \neq \alpha_{\tilde{n}\tilde{m}}$ entonces necesariamente la integral sobre el disco del producto $\psi_{nm} \psi_{\tilde{n}\tilde{m}}$ es igual a cero.

Siendo esto así, parece natural plantear la siguiente pregunta: ¿Es posible, al igual como se hizo para las funciones trigonométricas, expandir una función f definida en el disco en términos de las funciones ψ_{nm} ? La respuesta a esta pregunta la damos en el siguiente

Teorema 13.1 Sea $f \in L^2(D)$, esto es, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$\iint_D |f(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

y f es continua en D , entonces f puede escribirse como

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x, y), \quad (13.12)$$

donde los coeficientes c_{nm} vienen dados por

$$c_{nm} = \frac{\langle f, \psi_{nm} \rangle}{\langle \psi_{nm}, \psi_{nm} \rangle} = \frac{\iint_D f \bar{\psi}_{nm} dx dy}{\iint_D \psi_{nm} \bar{\psi}_{nm} dx dy}. \quad (13.13)$$

La importancia de este teorema reside en que nos permite resolver ecuaciones en derivadas parciales como las que hemos estudiado, usando el método de separación de variables.

La ecuación 13.13 nos dice que para calcular los coeficientes de la expansión de f en términos de las ψ_{nm} es necesario obtener las integrales de $|\psi_{nm}|^2$. Para obtener estas integrales vamos a usar la identidad de Green 13.11, observando que al escribir la integral doble como una integral de camino aparecieron términos de la forma

$$\mathbf{x} \cdot \nabla u = E u,$$

donde E es el operador de Euler. Para comenzar, veamos que el operador de Euler no conmuta con el operador de Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta(E w) &= (\partial_x^2 + \partial_y^2)(x \partial_x w + y \partial_y w) \\ &= 2 \partial_x^2 w + x \partial_x^3 w + x \partial_x \partial_y^2 w + 2 \partial_y^2 w + y \partial_y^3 w + y \partial_y \partial_x^2 w \\ &= 2(\partial_x^2 + \partial_y^2)w + (x \partial_x + y \partial_y)(\partial_x^2 + \partial_y^2)w \\ &= 2 \Delta w + E(\Delta w). \end{aligned}$$

Sean u y w dos funciones que satisfacen $\Delta u + \lambda u = 0$ y $\Delta w + \lambda w = 0$, por ejemplo $u = \psi_{nm}$ y $w = \bar{\psi}_{nm}$ en cuyo caso $\lambda = \alpha_{nm}^2/a^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((E w) \nabla u - u \nabla(E w)) &= (E w) \Delta u - u \Delta(E w) \\ &= -\lambda(E w)u - u(2 \Delta w + E(\Delta w)) \\ &= -\lambda(E w)u + 2 \lambda u w + \lambda u E w \\ &= 2 \lambda u w \end{aligned}$$

De modo que

$$u w = \frac{1}{2 \lambda} \nabla \cdot ((E w) \nabla u - u \nabla(E w)).$$

Integrando en el disco D y usando el teorema de Green en el plano encontramos que

$$\begin{aligned} \iint_D u w \, dx \, dy &= \frac{1}{2\lambda} \int_C \mathbf{x} \cdot ((E w) \nabla u - u \nabla (E w)) \, dt \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_C ((E w) E u - u E(E w)) \, dt \end{aligned}$$

Si $u(x, y) = \psi_{nm}(x, y) = J_n(\alpha_{nm} r/a) e^{in\theta}$ y $w = \bar{\psi}_{nm}$ Encontramos que

$$\begin{aligned} &\iint_D \psi(x, y) \bar{\psi}(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2\alpha_{nm}^2/a^2} \int_0^{2\pi} (r \partial_r (J_n(\alpha_{nm} r/a) e^{-int}))|_{r=a} (r \partial_r (J_n(\alpha_{nm} r/a) e^{int}))|_{r=a} dt \\ &= \frac{a^2}{2\alpha_{nm}^2} \int_0^{2\pi} \alpha_{nm}^2 (J'_n(\alpha_{nm}))^2 dt \\ &= a^2 \pi (J'_n(\alpha_{nm}))^2. \end{aligned}$$

Aquí se usó el hecho que en coordenadas polares el operador de Euler es

$$E = r \partial_r.$$

Concluimos que

$$|\psi_{nm}|^2 = a^2 \pi (J'_n(\alpha_{nm}))^2 \quad (13.14)$$

Ejemplo 1 Tomemos $a = 1$. Sea $0 < b \leq 1$ y consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < b; \\ 0 & \text{si } b < \sqrt{x^2 + y^2} < 1. \end{cases}$$

Queremos escribir esta función en términos de su desarrollo en términos de las funciones de Bessel. El numerador del coeficiente c_{nm} es, en este caso

$$\langle f, \psi_{nm} \rangle = \int_0^b \int_0^{2\pi} r J_n(\alpha_{nm} r) e^{-in\theta} d\theta dr = \int_0^b r J_n(\alpha_{nm} r) dr \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

Las integrales en la variable θ son nulas si $n \neq 0$. En consecuencia, todos los coeficientes c_{nm} con $n > 0$ son iguales a cero. Para $n = 0$ la integral sobre

θ vale 2π . Para evaluar la integral $\int_0^b r J_0(\alpha_{0m} r) dr$ usamos la relación de recurrencia 13.10 multiplicada por r :

$$r J_{n-1}(r) = n J_n(r) + r J'_n(r).$$

Para $n = 1$ encontramos que

$$r J_0(r) = J_1(r) + r J'_1(r) = (r J_1(r))'.$$

De modo que

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{0m} \rangle &= 2\pi \int_0^b r J_0(\alpha_{0m} r) dr \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_{0m}^2} \int_0^{\alpha_{0m} b} s J_0(s) ds \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_{0m}^2} \int_0^{\alpha_{0m} b} (s J_1(s))' ds \\ &= \frac{2\pi b}{\alpha_{0m}} J_1(\alpha_{0m} b) \end{aligned}$$

Cuando $a = 1$, la norma de las función ψ_{nm} vale $\pi (J'_n(\alpha_{nm}))^2$ y

$$c_{0m} = \frac{\langle f, \psi_{0m} \rangle}{\langle \psi_{0m}, \psi_{0m} \rangle} = \frac{2\pi b J_1(\alpha_{0m} b)/\alpha_{0m}}{\pi (J'_0(\alpha_{0m}))^2} = \frac{2 b J_1(\alpha_{0m} b)}{\alpha_{0m} J_1^2(\alpha_{0m})}.$$

De manera que

$$f(x, y) = 2b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_{0m} b)}{\alpha_{0m} J_1^2(\alpha_{0m})} J_0(\alpha_{0m} \sqrt{x^2 + y^2}).$$

En la figura 13.2 aparece el gráfico de la suma de los primeros 20 términos de esta expansión con las elecciones $b = 0.5$ e $y = 0$.

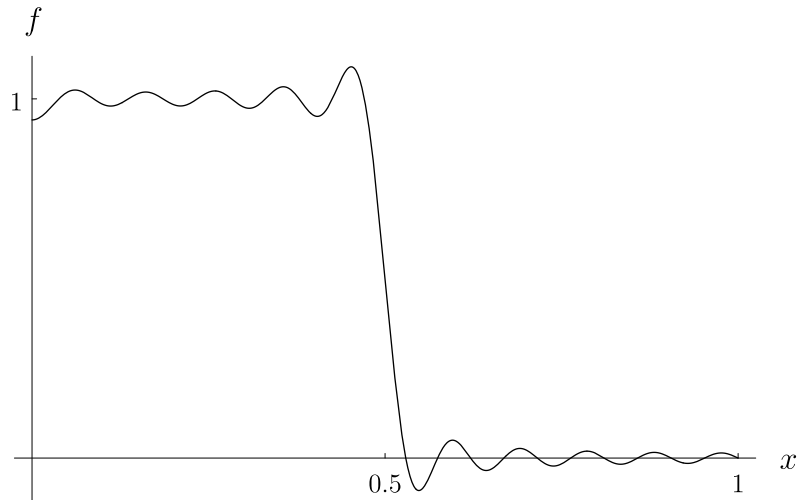


Figura 13.2

Ejemplo 2 Resolver la ecuación de Laplace $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)u = 0$ en el cilindro $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $z > 1$ con las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 1; \\ u(x, y, z)|_{x^2+y^2=1} &= 0; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} u(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Para resolver este problema busquemos soluciones de la forma $v(x, y, z) = R(x, y)Z(z)$ que satisfagan la ecuación de Laplace en Ω junto con las condiciones de borde

$$v(x, y, z)|_{x^2+y^2=1} = 0; \quad (13.15)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v(x, y, z) = 0. \quad (13.16)$$

Tenemos

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)v = (\Delta R(x, y))Z(z) + R(x, y)Z''(z) = 0,$$

donde Δ es el laplaciano en dos dimensiones. Supongamos que R y Z satisfacen

$$\Delta R + \lambda R = 0;$$

$$Z'' + \mu Z = 0.$$

Entonces

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)v = \Delta RZ + RZ'' = -(\lambda + \mu)RZ = 0.$$

Para evitar soluciones trivialmente nulas pedimos que $\lambda = -\mu$. La condición de borde 13.15 que satisface v se traduce en

$$R(x, y)Z(z)|_{x^2+y^2=1} = 0$$

Aquí pedimos que $R(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 0$. Esta condición de borde junto con la ecuación de autofunciones $\Delta R + \alpha R = 0$ nos dice que R es una de las funciones ψ_{nm} con $a = 1$ y $\lambda = \alpha_{nm}^2$. Puesto que $\mu = -\lambda$ encontramos que Z satisface

$$Z'' - \alpha_{nm}^2 Z = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones $Z(z) = b_{nm}e^{\alpha_{nm}z} + c_{nm}e^{-\alpha_{nm}z}$. De modo que las funciones

$$v_{nm}(x, y, z) = \psi_{nm}(x, y)(b_{nm}e^{\alpha_{nm}z} + c_{nm}e^{-\alpha_{nm}z})$$

satisfacen la ecuación de Laplace en Ω junto con la condición de borde 13.15. Para que estas funciones también satisfagan 13.16 pedimos que las constantes b_{nm} sean todas nulas. Usando el hecho de que una suma de soluciones de la ecuación de Laplace también es solución, encontramos que la función

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x, y) e^{-\alpha_{nm}z},$$

cumple con $\Delta u = 0$ junto con las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(x, y, z)|_{x^2+y^2=1} &= 0; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} u(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Para que u también satisfaga la condición de borde en $z = 0$ tenemos

$$u(x, y, 0) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x, y)$$

Usando los resultados del ejercicio anterior encontramos que si $n > 0$ los coeficientes c_{nm} son nulos. Si $n = 0$, (con $b = 1$) pedimos que

$$c_{0m} = \frac{2}{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})}.$$

Concluimos que la solución al problema planteado es

$$u(x, y, z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0m} r) e^{-\alpha_{0m} z}}{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicios

1. Considere la función

$$g(r, \theta) = e^{ir \operatorname{sen} \theta}.$$

- (a) Muestre que $g(r, \theta + \pi) = -g(r, \theta)$.
 (b) Escriba la función g en términos de las funciones de Bessel y usando la parte (a) muestre que

$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r)$$

2. Use la ecuación 13.6, que define a la función de Bessel de orden n para mostrar que

$$J_n(r) = \frac{r^n}{2^n n!} + \{ \text{potencias superiores de } r \}.$$

3. Sean $a > 0$ y $D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| \leq a \}$. Si f y ϕ son funciones definidas sobre D , la identidad de Green 13.11 y el teorema de la divergencia dicen que

$$\iint_D (f \Delta \phi - \phi \Delta f) dx dy = \int_C \mathbf{x} \cdot (f \nabla \phi - \phi \nabla f) dt,$$

donde C es la curva parametrizada por $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$.

Cuando $f(x, y) = (x + iy)^m = r^m e^{im\theta}$, y $\phi(x, y) = J_m(r) e^{-im\theta}$, tenemos $\Delta f = 0$ y $\Delta \phi + \phi = 0$. Obtenga

$$r^{m+1} J_m(r) = \frac{d}{dr} (r^{m+1} J_{m+1}(r)).$$

Sugerencia: Use las relaciones de recurrencia entre las funciones de Bessel.

4. Sea p una función dada. Queremos encontrar una antiderivada del producto $p(r)J_0(r)$ que tenga la forma

$$f(r)J_0(r) + g(r)J_0'(r)$$

donde las funciones f y g dependen de p .

- (a) Muestre que la función g satisface

$$r g'(r) - r^2 g''(r) - (1 + r^2) g(r) = r^2 p(r)$$

- (b) Determine la función $p(r)$ si $g(r) = r$, r^2 y r^3 . Usando estos resultados evalúe las integrales

$$\int_0^r s J_0(s) ds \quad \text{y} \quad \int_0^r s^3 J_0(s) ds$$

5. Queremos expresar la función $h(r) = 1 - r^2$ definida sobre $0 \leq r \leq 1$ como una superposición de las funciones $J_0(\alpha_{0m}r)$. Recordando que este conjunto de funciones son ortogonales con respecto a $\int_0^1 r dr$ y utilizando el resultado del ejercicio anterior, obtenga

$$1 - r^2 = 8 \sum_{m=1, \infty} \frac{J_0(\alpha_{0m}r)}{\alpha_{0m}^3 J_1(\alpha_{0m})}$$

6. Muestre que

$$r^n = -2 \sum_{m=1, \infty} \frac{J_n(\alpha_{nm}r)}{\alpha_{nm} J_{n-1}(\alpha_{nm})}$$

7. Resolver la ecuación de calor $\partial_t u - \Delta u = 0$ en la disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ y } t > 0\}$ si u satisface

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= 0 && \text{cuando } x^2 + y^2 = 1 \text{ y } t \geq 0 \\ u(0, x, y) &= 1 - x^2 - y^2 && \text{cuando } x^2 + y^2 < 1 \end{aligned}$$

Capítulo 14

Transformada de Fourier

En la teoría de las series de Fourier, se muestra que uno puede escribir funciones 2π periódicas arbitrarias como combinaciones lineales infinitas de senos y cosenos, para las cuales todos los cálculos podían hacerse en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Uno puede, sin embargo, cambiar el intervalo $[-\pi, \pi]$ a cualquier otro intervalo de la forma $[-M\pi, M\pi]$ reescalando las funciones trigonométricas. Supongamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es suave a trozos, pero satisface $f = 0$ fuera de algún intervalo finito. Si reemplazamos e^{int} por $\phi_n(t) = e^{int/M}$, obtenemos una familia de funciones ortogonales sobre $-\pi M \leq t \leq \pi M$. Los coeficientes para estas series de Fourier escaladas son

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{1}{2\pi M} \int_{-\pi M}^{\pi M} f(t) e^{-i(n/M)t} dt = \frac{1}{M} g\left(\frac{n}{M}\right),$$

donde

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi M}^{\pi M} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

La serie de Fourier para $f(t)$ sobre $-M\pi \leq t \leq M\pi$ toma ahora la forma

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n/M)t} g\left(\frac{n}{M}\right) \frac{1}{M}.$$

Tomando formalmente el límite cuando $M \rightarrow \infty$ vemos que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{it\omega} d\omega, \quad (14.1)$$

porque la serie para cada $M > 0$ puede verse como una suma de Riemann para la integral con puntos de muestreo $\omega_n = n/M$ y con intervalos de longitud $1/M$. Por otra parte,

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (14.2)$$

siempre que f se anule fuera del intervalo $|t| \leq M\pi$. La ecuación 14.1 parece decir que $f(t)$ es una superposición continua de funciones $e^{i\omega t}$, con fases y amplitudes dadas por alguna función $g(\omega)$ definida en un “eje de frecuencias”. La ecuación 14.2 nos dice entonces cómo obtener $g(\omega)$ en términos de $f(t)$.

Este argumento, a pesar de lo sugestivo que pueda parecer, no es totalmente satisfactorio. La convergencia de las sumas de Riemann a la integral es dudosa si no sabemos que $g(\omega)$ está en L^1 ; más aún, en muchas aplicaciones $f(t)$ no se anula fuera de un intervalo finito.

Formalmente damos la siguiente

Definición 14.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función dada. Definimos la transformada de Fourier de f en $\omega \in \mathbb{R}$ a través de

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (14.3)$$

siempre que la integral exista.

Diremos que g es el análisis en frecuencias de la función f . ¿Qué clase de funciones cuentan con una transformada de Fourier? Una respuesta parcial a esta pregunta está dada por el siguiente

Teorema 14.1 Sea f una función absolutamente integrable sobre \mathbb{R} ($f \in L^1$). Entonces,

1. la función g , transformada de Fourier de f , existe para todo $\omega \in \mathbb{R}$ y g es una función acotada.
2. g es continua.

Demostración.

1. Sea $M = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$. Si $\omega \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned} |g(\omega)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-i\omega t}| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} M. \end{aligned}$$

De modo que g está definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$ y está acotada por $M/(2\pi)$.

2. Observemos que

$$\begin{aligned} |g(\omega + h) - g(\omega)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})| dt \end{aligned}$$

Ahora bien la función $p(t) = f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})$ converge puntualmente a la función cero cuando h tiende a cero. En valor absoluto, p está acotada por $2|f|$. Como f está en L^1 el teorema de convergencia dominada 2.6 nos garantiza que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})| dt &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} |f(t)(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})| dt &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{h \rightarrow 0} |g(\omega + h) - g(\omega)| = 0$ y g es continua.

Ejemplo 1 Tomemos el pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -a; \\ 1 & \text{si } -a \leq t \leq a; \\ 0 & \text{si } a < t. \end{cases}$$

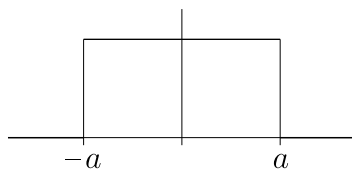


Figura 14.1

La función f cumple con $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = 2a < \infty$, esto es, $f \in L^1$. Sin embargo, f no es continua. Un cálculo sencillo nos muestra que su transformada de Fourier es $g(\omega) = \text{sen}(a\omega)/(\pi\omega)$. Observemos que $g(\omega)$ es infinitamente diferenciable en todo ω , pero $g(\omega)$ no está en L^1 porque $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)| d\omega = \infty$.

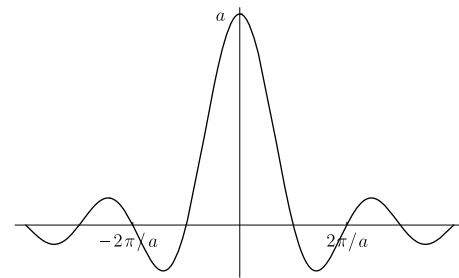


Figura 14.2

Ejemplo 2 Sea $f(t) = e^{-|t|}$. Esta función está de nuevo en L^1 pero a diferencia de la función anterior, ésta es continua. Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi(1-i\omega)} e^{(1-i\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} e^{-(1+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}. \end{aligned}$$

$g(\omega)$ está en L^1 y es derivable en todo ω . Finalmente, queremos resaltar que g es una función par. De modo que

$$g(\omega) = g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{i\omega t} dt.$$

Este resultado lo vamos a usar más adelante.

Ejemplo 3 Consideremos la siguiente situación: la función $g(\omega) = \cos t_0\omega$ aparece como la transformada de Fourier de alguna función $f(t)$. Ahora bien, de Moivre nos dice que

$$g(\omega) = \frac{1}{2}(e^{it_0\omega} + e^{-it_0\omega})$$

sugiriendo que la función $f(t)$ que aparece en 14.3, de alguna forma selecciona justamente los instantes $\pm t_0$. Una “función” que hace este trabajo es

$$f(t) = \pi\delta(t + t_0) + \pi\delta(t - t_0)$$

En el próximo ejemplo ilustraremos el uso de la transformada de Fourier en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 4 Una barra de longitud infinita tiene una temperatura inicial $f(x)$ definida en $-\infty < x < \infty$. Queremos encontrar la temperatura $u(x, t)$ en tiempos posteriores. Asumiendo que u satisface la ecuación de calor

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$$

junto con la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, vemos que la respuesta es fácil cuando $f(x) = \cos \omega_0 x$ o $\sin \omega_0 x$, porque en estos casos

$$u(x, t) = f(x) e^{-\omega_0^2 t}$$

Pero $f(x)$ no tiene por qué ser tan sencilla. En particular

$$f(x) = 3 \cos x - 2 \sin 2x + 7$$

daría

$$u(x, t) = 3 \cos x e^{-t} - 2 \sin 2x e^{-4t} + 7$$

Por tanto, para encontrar $u(x, t)$ para una función general $f(x)$, debemos saber cómo descomponer la función $f(x)$ en senos y cosenos con distintas frecuencias. Esto es exactamente el propósito de la teoría de la transformada de Fourier.

El ejemplo que sigue va a aparecer con cierta frecuencia.

Ejemplo 5 Consideremos la campana de Gauss $f(t) = e^{-t^2/2}$. Esta función está en L^1 . De hecho, el producto de esta función por cualquier polinomio en t también está en L^1 . Ahora bien, no es fácil calcular

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt,$$

directamente. Para hallar $g(\omega)$ explícitamente, notemos que $f(t)$ satisface la ecuación diferencial $f'(t) + t f(t) = 0$. Veamos qué ecuación diferencial satisface g .

$$\begin{aligned} g'(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{de^{-i\omega t}}{dt} dt \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{-\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= -\omega g(\omega) \end{aligned}$$

y por tanto, $g'(\omega) + \omega g(\omega) = 0$. El teorema de unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos garantiza que $g(\omega)$ no puede ser otra cosa que $c e^{-\omega^2/2}$, con $c \in \mathbb{R}$. Para encontrar el valor de c observemos que

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

por lo que el ejemplo queda resumido en la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt.$$

De esta manera, hemos encontrado que la transformada de Fourier de la campana de Gauss es de nuevo, salvo una constante multiplicativa, una campana de Gauss.

14.1 Teoremas operacionales

La transformada de Fourier cumple con una serie de propiedades que enunciamos a continuación. La demostración de estas propiedades se hace de manera análoga al caso de las transformadas de Laplace y se dejan como ejercicio. Supongamos que $f \in L^1$ y escribamos $\mathcal{F}(f) = g$ para denotar que g es la transformada de Fourier de f . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(ct))(\omega) &= (1/|c|) g(\omega/c) \\ \mathcal{F}(f(t+t_0))(\omega) &= e^{it_0\omega} g(\omega) \\ \mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} f(t))(\omega) &= g(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Si $f'(t)$ también está en L^1 y $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$, entonces

$$\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = i\omega g(\omega).$$

Si $t f(t)$ está en L^1 , entonces

$$\mathcal{F}(t f(t))(\omega) = i g'(\omega).$$

Ejemplo 6 En el ejemplo 5 vimos que la transformada de Fourier de la campana de Gauss, $e^{-t^2/2}$ es $e^{-\omega^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Cuando $p(t)$ es un polinomio, el producto $p(t)e^{-t^2/2}$ es una función que está en L^1 y tiende a cero cuando $|t|$

tiende a infinito. Usando los teoremas operacionales podemos construir la tabla

$$\begin{array}{rcl}
 e^{-t^2/2} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2} \\
 \downarrow \frac{d}{dt} & \downarrow \times i\omega \\
 -t e^{-t^2/2} & \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \omega e^{-\omega^2/2} \\
 \downarrow \frac{d}{dt} & \downarrow \times i\omega \\
 (t^2 - 1)e^{-t^2/2} & \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \omega^2 e^{-\omega^2/2}
 \end{array}$$

De aquí se desprende que si $f(t) = e^{-t^2/2} \sum_{k=0}^n a_k t^k$, su transformada de Fourier debe tener la forma $g(\omega) = e^{-\omega^2/2} \sum_{k=0}^n b_k \omega^k$. Los coeficientes b_k se pueden calcular a partir de los a_k mediante álgebra lineal. Para $n = 2$, por ejemplo, la tabla muestra que

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

14.2 Transformada de Fourier Inversa

En el ejemplo 2 de este capítulo vimos que

$$\frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt.$$

Usando los teoremas operacionales arriba mencionados, observamos que la transformada de Fourier de la función $e^{-|t|/n}$ es

$$D_n(\omega) = \frac{n}{\pi(1 + n^2\omega^2)}.$$

Cuando n tiende a infinito, $D_n(x)$ se convierte en un pulso cada vez más concentrado en torno a $\omega = 0$:

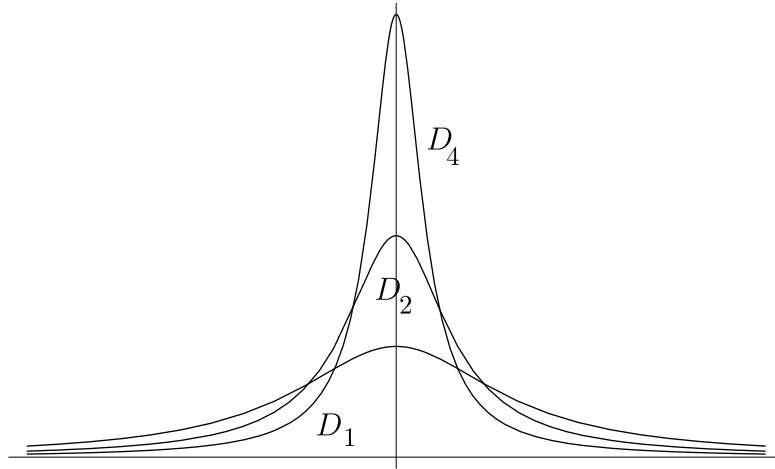


Figura 14.3

La poderosa idea de la delta de Dirac entra ahora en juego. En el ejemplo 1 del capítulo 3 vimos que esta secuencia de funciones tiende a la delta de Dirac concentrada en cero. A partir de todo esto podemos demostrar la invertibilidad de la transformada de Fourier en un caso crucial.

Teorema 14.2 *Teorema de Plancharel para Funciones L^1 Continuas.* Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, con $g \in L^1$ y definamos

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{it\omega} d\omega.$$

Supongamos adicionalmente que f también está en L^1 . Entonces

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Demostración Sea $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) g(\omega) d\omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(\omega - \omega_0) g(\omega) d\omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(\omega_0 - \omega) g(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

donde la última igualdad queda justificada por el hecho de que todas las funciones D_n son funciones pares. Escribiendo D_n en términos de las transformadas de $e^{-|t|/n}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(\omega_0 - \omega)g(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/n} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} dt g(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/n} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} g(\omega) d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-|t|/n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(\omega) d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-|t|/n} f(t) dt \end{aligned}$$

donde el intercambio del orden de integración en la segunda línea queda justificado porque la integral doble $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/n} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} g(\omega) dt d\omega$ converge absolutamente. Finalmente,

$$g(\omega_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-|t|/n} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} f(t) dt.$$

El intercambio del orden de límites con integración queda justificado porque cuando n tiende a infinito la función $e^{-i\omega_0 t} e^{-|t|/n} f(t)$ converge puntualmente a $e^{-i\omega_0 t} f(t)$ y porque $|e^{-i\omega_0 t} e^{-|t|/n} f(t)| \leq |f(t)|$. Esto nos garantiza que podemos usar el teorema de la convergencia dominada. Esto termina la demostración.

El teorema precedente lo podemos interpretar de la siguiente forma: Si f y su transformada de Fourier g pertenecen ambas a L^1 y ambas son continuas entonces uno puede recuperar la función f a través de la ecuación

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (14.4)$$

A la ecuación 14.4 la llamaremos la transformada de Fourier inversa de la función g y diremos que la integral 14.4 sintetiza la función f a partir de g .

Ejemplo 7 Sea $p(t)$ el pulso triangular

$$p(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Observemos que $p(t)$ está en L^1 , es continua y tiene soporte acotado. Si $p(t)$ fuera una señal en el tiempo, entonces querríamos pensar a $p(t)$ como una superposición de ondas sinusoidales. Calculemos la transformada de Fourier de p

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}^2(\omega/2)}{\pi \omega^2}. \end{aligned}$$

Vemos que g es continua y cumple con $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)| d\omega < \infty$. Por el teorema anterior concluimos que

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} g(\omega) d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\omega/2)}{\omega^2} \cos \omega t d\omega.$$

Hasta ahora nos hemos encontrado en situaciones donde la transformada de Fourier de una función f que está en L^1 puede a su vez estar o no en L^1 . ¿Cuándo podemos estar seguros de que el teorema L^1 de Plancharel vale y más generalmente cómo influyen las propiedades particulares de una función en su transformada de Fourier? En lo que sigue proponemos dar una respuesta a estas preguntas.

14.3 El espacio de las funciones de Schwartz

Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que f y su derivada están en L^1 y que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$$

Denotemos con g la transformada de Fourier de f . El teorema de transformada de derivadas nos dice

$$i\omega g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Tomando valor absoluto en ambos lados de la ecuación anterior, encontramos

$$|g(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi |\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt.$$

Esto muestra que $|g(\omega)|$ decae al menos como $1/|\omega|$ cuando $\omega \rightarrow \pm\infty$. Si las primeras m derivadas de f están en L^1 y

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

un argumento similar nos muestra que

$$|g(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi |\omega|^m} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(t)| dt. \quad (14.5)$$

En particular, si $m \geq 2$ entonces la función g también está en L^1 . Como g es la transformada de Fourier de una función que pertenece a L^1 , g también es continua y el teorema de Plancharel nos dice que podemos recuperar a la función f mediante la transformada inversa.

Por otra parte, supongamos ahora que f es tal que para $m > 0$ ocurre que $t^k f(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ está en L^1 . Entonces,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^m f(t) e^{-i\omega t} dt = (i)^m \frac{d^m g}{d\omega^m}(\omega). \quad (14.6)$$

Esto nos indica que g cuenta con al menos m derivadas. (Sin embargo, aquí no está garantizado que g y sus primeras m derivadas estén en L^1 .) Este par de consideraciones nos hablan de las propiedades de las transformadas de Fourier de una cierta clase de funciones. Vamos a mezclar ambas propiedades en la siguiente

Definición 14.2 Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pertenece al espacio de funciones de Schwartz si

1. f es C^∞ y
2. para todo par de enteros positivos m y n f satisface

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^m \frac{d^n f}{dt^n}(t) \right| \leq \infty. \quad (14.7)$$

A este espacio de funciones lo denotaremos con C_{\downarrow}^∞ .

Veamos qué nos dice esta definición. Supongamos que $f \in C_{\downarrow}^\infty$. Para $m = 0$ la relación 14.7 se reduce a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^n f}{dt^n}(t) \right| \leq \infty$$

y nos dice que para n fijo, $f^{(n)}$ es una función acotada. Pero para $m > 0$ la desigualdad 14.7 también nos dice que $t^m f^{(n)}(t)$ es acotada. De manera tal que si $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ existen constantes $c_{mn} > 0$ (que depende de f) tales que

$$\left| \frac{d^n f}{dt^n}(t) \right| \leq \frac{c_{mn}}{|t|^m}.$$

Concluimos que f junto con sus derivadas de orden n decrecen rápidamente cuando t tiende a $\pm\infty$.

Una función que trivialmente pertenece al espacio de funciones de Schwartz es la función idénticamente nula. Un ejemplo no trivial es la campana de Gauss, $f(t) = e^{-t^2/2}$. La campana de Gauss es una función infinitamente diferenciable y su fuerte decrecimiento cuando t tiende a $\pm\infty$ garantiza que esta función satisface la desigualdad 14.7. Por la misma razón cualquier polinomio, multiplicado por la campana de Gauss también es una función en C_{\downarrow}^{∞} . Las funciones que aparecen en la figura están en el espacio de Schwartz.

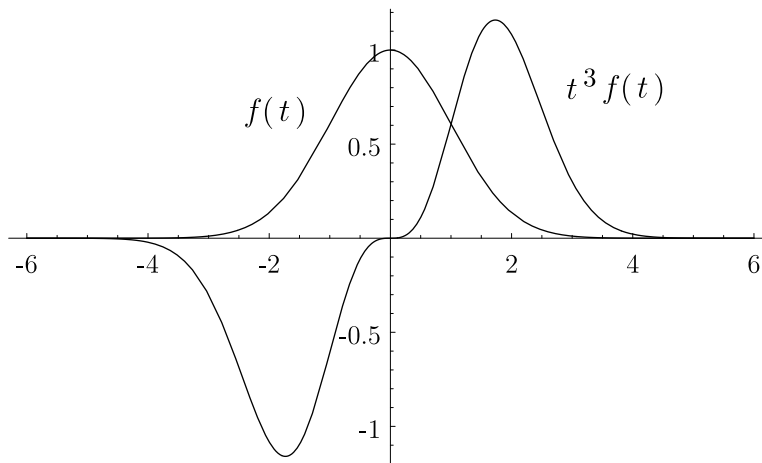


Figura 14.4

Finalmente queremos resaltar el hecho de que el espacio de funciones de Schwartz es un espacio vectorial de funciones. Si f y g pertenecen a C_{\downarrow}^{∞} entonces $\alpha f + \beta g$ también lo está.

El teorema que sigue cae por su propio peso.

Teorema 14.3 Si f es una función que pertenece al espacio de funciones Schwartz, entonces su transformada de Fourier g existe, está en C_{\downarrow}^{∞} y su transformada inversa coincide con la función f .

Demostración. Como $f(t) \in C_{\downarrow}^{\infty}$ su fuerte decrecimiento cuando $t \rightarrow \pm\infty$ garantiza que $f \in L^1$. Por tanto su transformada de Fourier, llamémosla g , existe. Queremos ver que g también está en C_{\downarrow}^{∞} . Observemos que dado el entero $m > 0$, las funciones $t^k f(t)$, con $k = 1, \dots, m$ también están en L^1 y la ecuación 14.6 nos dice que g cuenta con derivadas hasta de orden m . Como esto vale para cualquier $m > 0$ concluimos que g es infinitamente diferenciable. Para ver que $g(\omega)$ decrece rápidamente cuando $|\omega|$ es grande, observemos que dado el entero $n > 0$, f y sus primeras n derivadas están en L^1 . Para $k = 1, 2, \dots, n$, $f^{(k)}(t)$ tiende a cero cuando t tiende a $\pm\infty$. La ecuación 14.5 nos dice que $|w^n g(w)|$ está acotada. Esto implica que $g(w)$ decrece rápidamente cuando $w \rightarrow \pm\infty$ y $g \in C_{\downarrow}^{\infty}$. En particular, g pertenece a L^1 y el teorema de Plancharel nos garantiza que f es la transformada inversa de g . Igualmente se puede demostrar que $|w^n g^{(k)}(w)|$ está acotada. Esto termina la demostración.

Este teorema lo podemos resumir diciendo que la transformada de Fourier es un mapa entre el espacio de funciones C_{\downarrow}^{∞} en el eje t y el espacio de funciones C_{\downarrow}^{∞} en el eje ω . Este mapa es una biyección puesto que cuenta con una inversa.

La importancia del espacio de funciones de Schwartz lo veremos en el próximo capítulo donde definiremos la transformada de Fourier en el contexto de funciones generalizadas.

Ejercicios

1. Haciendo los cálculos necesarios, verifique que la transformada de Fourier de la función f en el ejemplo 1 es

$$g(\omega) = \frac{\text{sen}(a\omega)}{\pi\omega}.$$

2. Usando residuos, calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\omega}}{1 + \omega^2} d\omega.$$

Sugerencia: Considere por separado los casos $t < 0$ y $t > 0$ y observe que el integrando tiene polos en $z = \pm i$.

3. Verifique que la función $u(x, t) = \text{sen}(\omega_0 x) e^{-\omega_0^2 t}$ satisface la ecuación de calor

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t).$$

4. Supongamos que $f \in L^1$ y escribamos $g = \mathcal{F}(f)$ muestre que
- (a) La transformada de Fourier de $f(ct)$ es $(1/|c|)g(\omega/c)$
 - (b) La transformada de Fourier de $f(t+t_0)$ es $e^{it_0\omega}g(\omega)$
 - (c) La transformada de Fourier de $e^{i\omega_0 t}f(t)$ es $g(\omega-\omega_0)$
 - (d) Si $f'(t)$ también está en L^1 y $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$, muestre que la transformada de Fourier de $f'(t)$ es $i\omega g(\omega)$.
 - (e) Si $tf(t)$ está en L^1 , muestre que la transformada de Fourier de $tf(t)$ es $ig'(\omega)$.
5. Calcule la transformada de Fourier de $t^3 e^{-t^2/2}$
6. Sea n un entero no negativo. Calcule la transformada de Fourier de $e^{-|t|/n}$
7. Sea $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ muestre que $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t)/(2\pi)$

Capítulo 15

Transformadas de Fourier de Distribuciones

En el capítulo anterior vimos que las ecuaciones

$$\begin{aligned}g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{it\omega} d\omega\end{aligned}$$

expresan una biyección entre el espacio de funciones de Schwartz $f(t)$ en el eje de las t y el espacio de funciones de Schwartz $g(\omega)$ en el eje de frecuencias. En otras palabras, “ $g(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ si y sólo si $f(t)$ es la transformada de Fourier inversa de $g(\omega)$.”

Esto está muy bien cuando f y g son campanas de Gauss multiplicadas por polinomios, pero no nos dice nada sobre la transformada de Fourier de $F(t) = 1 + t^2$, por ejemplo. En este capítulo nos proponemos darle sentido a la transformada de Fourier de este tipo de funciones.

Para motivar la discusión vamos a indagar primero un poco más sobre las propiedades que tienen las funciones del espacio de Schwartz en relación a sus transformadas de Fourier. Para evitar la proliferación de símbolos vamos a introducir la siguiente notación. Si $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ denotaremos su transformada de Fourier con \hat{f} . Con esta notación tenemos que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Sea $g \in C_{\downarrow}^{\infty}$ (g no tiene porqué ser la transformada de Fourier de f) y consideremos la integral producto de \hat{g} con f :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) f(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt f(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega dt. \end{aligned}$$

El intercambio del orden de integración se justifica porque el fuerte decrecimiento de las funciones f y g garantizan que la integral doble de la función $|f(t) f(\omega) e^{-i\omega t}|$ converge. La integral $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ no es otra cosa que la transformada de Fourier de f , sólo que los papeles de las variables ω y t han sido intercambiados. Concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) f(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \hat{f}(t) dt \quad (15.1)$$

Esta propiedad que hemos descubierto para las funciones del espacio de Schwartz y sus transformadas de Fourier es la base para extender la transformada de Fourier a un conjunto mayor de funciones. La integral del producto de las funciones g y $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ lo podemos interpretar como la acción de g sobre f :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt = \langle g | f \rangle \quad (15.2)$$

De esta forma, elevamos a la función g al contexto de función generalizada actuando sobre el espacio de funciones de Schwartz. Este comentario lo vamos a formalizar con la siguiente

Definición 15.1 Distribuciones Atemperadas. Diremos que un funcional $K : C_{\downarrow}^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$ es una *distribución atemperada o moderada* siempre que K satisfaga la condición

$$\langle K | \alpha f + \beta g \rangle = \alpha \langle K | f \rangle + \beta \langle K | g \rangle,$$

para todo par de funciones $f(t), g(t)$ en C_{\downarrow}^{∞} y todo par de números complejos α y β . Al espacio de distribuciones atemperadas lo denotaremos con $C_{\uparrow}^{-\infty}$.

El nombre de distribución atemperada nace del hecho de que a este espacio pertenece cualquier función $G(t)$, suave a trozos que crezca no más

rápidamente que alguna potencia de t , vista como una función generalizada. En efecto, si $|G(t)| \leq c |t^n|$, donde $c \geq 0$ y $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ observamos que $t^n f(t)$ también está en el espacio de funciones de Schwarz y la integral del valor absoluto de esta función converge. Así

$$\begin{aligned} |\langle G | f \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} c |t^n| |f(t)| dt = c \int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)| dt \leq \infty. \end{aligned}$$

Como todas las funciones del espacio de Schwartz son continuas, la función delta de Dirac también está entre las distribuciones atemperadas.

Por otra parte, si $g \in C_{\downarrow}^{\infty}$ la ecuación 15.2 nos enseña que podemos pensar a g como una función generalizada actuando sobre el espacio C_{\downarrow}^{∞} , esto es, como un elemento en $C_{\uparrow}^{-\infty}$. Más aún, la ecuación 15.1 la podemos reescribir en este contexto como

$$\langle \hat{g} | f \rangle = \langle g | \hat{f} \rangle$$

Esta propiedad la vamos a extender a todas las distribuciones atemperadas en la siguiente

Definición 15.2 Sea G una distribución atemperada. Definimos la transformada de Fourier de G como el funcional \hat{G} que actuando sobre una función $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ arroja

$$\langle \hat{G} | f \rangle = \langle G | \hat{f} \rangle. \quad (15.3)$$

Esto es, el resultado numérico del funcional \hat{G} sobre f coincide con el de la distribución atemperada G pero actuando sobre la transformada de Fourier de f .

De la definición es claro que \hat{G} también es una distribución atemperada. La linealidad de \hat{G} resulta de

$$\begin{aligned} \langle \hat{G} | \alpha f + \beta g \rangle &= \langle G | (\alpha f + \beta g)^{\wedge} \rangle = \langle G | \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \rangle \\ &= \alpha \langle G | \hat{f} \rangle + \beta \langle G | \hat{g} \rangle = \alpha \langle \hat{G} | f \rangle + \beta \langle \hat{G} | g \rangle \end{aligned}$$

Para ilustrar la definición de la transformada de Fourier a nivel de distribuciones consideremos los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1 Consideremos la función $G(t) = 1$. Esta función es de crecimiento moderado y por tanto podemos verla como una distribución atemperada. Su acción sobre la función de prueba $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ es

$$\langle 1 | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1 f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

De manera similar,

$$\langle \hat{1} | f \rangle = \langle 1 | \hat{f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt.$$

Pero la integral de \hat{f} sobre \mathbb{R} podemos verla como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = f(0).$$

Por tanto,

$$\langle \hat{1} | f \rangle = f(0) = \langle \delta | f \rangle.$$

Como esto vale para toda función de prueba $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ tenemos una igualdad a nivel de distribuciones. Concluimos que la transformada de Fourier de la función $G(t) = 1$ es la delta de Dirac concentrada en cero.

Ejemplo 2 Calculemos la transformada de Fourier de la delta de Dirac.

$$\langle \hat{\delta} | f \rangle = \langle \delta | \hat{f} \rangle = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega.$$

Podemos interpretar la última integral como la acción de la función $G(\omega) = 1/(2\pi)$ actuando sobre la función de prueba $f(\omega)$. Esta interpretación nos permite escribir

$$\langle \hat{\delta} | f \rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi} | f \right\rangle,$$

para concluir que la transformada de la delta de Dirac es la función constante $1/(2\pi)$.

El siguiente teorema nos dice que la transformada de Fourier cuenta con una inversa a nivel de distribuciones.

Teorema 15.1 Sean F y G dos distribuciones atemperadas y supongamos que sus transformadas de Fourier \hat{F} y \hat{G} cumplen $\hat{F} = \hat{G}$ entonces $F = G$.

En efecto, sea $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ una función de prueba. Denotemos con \check{f} su transformada inversa ($\check{f} \in C_{\downarrow}^{\infty}$). Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \hat{F} - \hat{G} | \check{f} \rangle = \langle \hat{F} | \check{f} \rangle - \langle \hat{G} | \check{f} \rangle = \langle F | (\check{f})^{\wedge} \rangle - \langle G | (\check{f})^{\wedge} \rangle \\ &= \langle F | f \rangle - \langle G | f \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $\langle F | f \rangle = \langle G | f \rangle$. Como esto vale para toda función de prueba f concluimos que $F = G$.

Este teorema y su demostración nos sugieren la siguiente

Definición 15.3 Sea G una distribución atemperada. Definimos su transformada inversa, \check{G} como la distribución dada por

$$\langle \check{G} | f \rangle = \langle G | \check{f} \rangle.$$

Ejemplo 3 Calculemos la transformada inversa de la delta de Dirac. Sea $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ entonces

$$\langle \check{\delta} | f \rangle = \langle \delta | \check{f} \rangle = \check{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \langle 1, f \rangle$$

Como esto vale para toda $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ concluimos que la transformada inversa de la función δ es la función constante 1, en concordancia con lo que ya habíamos visto en el ejemplo 1.

En la literatura sobre este tema encontramos que aún para distribuciones atemperadas se usa la notación

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

y

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

para expresar el hecho de que la distribución G es la transformada de Fourier de F y que F es la transformada inversa de G . Esta notación es sumamente útil y también la vamos a adoptar en este libro. Sin embargo queremos resaltar que muchas de estas integrales son ficticias. En el ejemplo 1 vimos

que la transformada de la distribución $F(t) = 1$ es la delta concentrada en cero $\delta(\omega)$. En términos de integrales esto lo escribimos como

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt.$$

La integral de la derecha, vista como integral de Riemann no tiene sentido, sencillamente no converge. La única interpretación que nos queda es que esta es una integral ficticia que expresa el hecho de que la transformada de Fourier de la función constantemente igual a 1 es la delta de Dirac concentrada en 0. En el ejemplo 2 vimos que la transformada de la delta es la función $G(\omega) = 1/2\pi$. En términos de integrales esto lo escribimos como

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt$$

y aquí le damos la interpretación usual a esta integral ficticia: es el valor de la función (continua), $e^{-i\omega t}$ en $t = 0$.

15.1 Teoremas Operacionales

Todos los teoremas operacionales enunciados en el capítulo anterior son válidos a nivel de distribuciones. La única precaución que hay que tomar es reemplazar las derivadas por derivadas generalizadas.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F(t))(\omega) &= \hat{F}(\omega) \\ \mathcal{F}(F'_{\text{gen}}(t))(\omega) &= i\omega \hat{F}(\omega) \\ \mathcal{F}(tF(t))(\omega) &= i\hat{F}'_{\text{gen}}(\omega) \\ \mathcal{F}(F(t-t_0))(\omega) &= \hat{F}(\omega)e^{-i\omega t_0} \\ \mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}F(t))(\omega) &= \hat{F}(\omega - \omega_0) \\ \mathcal{F}(\alpha F(t) + \beta G(t))(\omega) &= \alpha \hat{F}(\omega) + \beta \hat{G}(\omega) \end{aligned}$$

Las pruebas son ejercicios en la manipulación de definiciones. Por ejemplo, consideremos la transformada de Fourier de la derivada generalizada de F

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F'_{\text{gen}})^{\wedge}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F'_{\text{gen}}(t) \hat{g}(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{d\hat{g}}{dt}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) (-i\omega g(\omega))^{\wedge}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) (i\omega g(\omega)) d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega \hat{F}(\omega)) g(\omega) d\omega,
\end{aligned}$$

donde se usó que $(\mathcal{F}(g))' = \mathcal{F}(-i\omega g(\omega))$.

Con esto terminamos el objetivo de extender el espacio de funciones sobre el cual la transformada de Fourier está definida. Los siguientes ejemplos sirven para ilustrar el uso de estos resultados.

Ejemplo 4 Calculemos la transformada de Fourier de $F(t) = (\text{sen}^2 t)/t$.

Evidentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(\text{sen}^2 t)}{t} \right| dt = \infty,$$

Pero $F(t) = \text{sen}^2 t/t$ es continua y acotada y por tanto puede verse como una distribución moderada.

Para deshacernos de la t en el denominador, podemos aplicar uno de los teoremas operacionales a

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t} e^{-i\omega t} dt,$$

para obtener

$$(\hat{F})'_{\text{gen}}(\omega) = i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}^2 t e^{-i\omega t} dt.$$

Ahora, $\text{sen}^2 t$ es un polinomio trigonométrico que puede ser reescrito como

$$\left(\frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{2it} - \frac{1}{4} e^{-2it}.$$

Pero la transformada de Fourier de un polinomio trigonométrico es una suma de deltas. Comenzando con

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt,$$

podemos aplicar los teoremas sobre traslaciones para obtener

$$\delta(\omega \pm 2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{\mp 2it} dt.$$

Así

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}^2 t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{4}\delta(\omega - 2) - \frac{1}{4}\delta(\omega + 2).$$

Poniendo todas estas fórmulas juntas vemos que la función que estamos buscando satisface

$$\hat{F}'_{\text{gen}}(\omega) = i \left(\frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{4}\delta(\omega - 2) - \frac{1}{4}\delta(\omega + 2) \right).$$

La solución general para F es la función suave a trozos

$$F(\omega) = i \left(-\frac{1}{4}H(\omega + 2) + \frac{1}{2}H(\omega) - \frac{1}{4}H(\omega - 2) \right) + c = iG(\omega) + c$$

donde $G(\omega)$ aparece en la figura 15.1. Observamos que $G(\omega)$ está en L^1 .

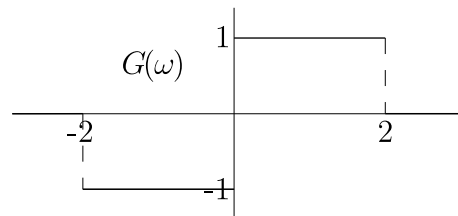


Figura 15.1

Si la constante c fuera distinta de cero, entonces la transformada inversa de G sería una función continua más un múltiplo no nulo de $\delta(\omega)$. Pero sabemos que la transformada inversa de G es precisamente la función acotada $\operatorname{sen}^2 t/t$. Por tanto, la constante c vale cero y concluimos el ejemplo con el resultado final

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} e^{-i\omega t} dt = iG(\omega).$$

Ejemplo 5 (Teorema de Parseval). Sea $f \in C_{\downarrow}^{\infty}$ y g su transformada de Fourier. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega.$$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{f}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\omega) e^{-it\omega} d\omega dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\omega) 2\pi g(\omega) d\omega \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

¿Por qué podemos cambiar el orden de integración en la antepenúltima línea?

El teorema de Parseval es válido en la misma forma para cualquier función $g(\omega)$ que satisfaga $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega < \infty$. La hipótesis de que $g \in C_{\downarrow}^{\infty}$ hace que la prueba sea más fácil, pero no es necesaria para que la tesis del teorema mismo sea cierto.

Ejercicios

1. Sea P el polinomio dado por $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ donde a_0, \dots, a_n son constantes complejas. Calcule la transformada de Fourier de P .
2. Considere la función $u(t)$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} \text{sen}(t), & \text{en } |t| < \pi \\ 0, & \text{en } |t| \geq \pi \end{cases}$$

- (a) Calcule la función generalizada f dada por

$$f(t) = \frac{d^2 u}{dt^2_{\text{gen}}}(t) + u(t)$$

- (b) Deduzca la ecuación diferencial que relaciona a $\hat{f}(\omega)$ con $\hat{g}(\omega)$.
- (c) Evalúe $\hat{g}(\omega)$ explícitamente.
3. Usando cualquier función $\phi(t) \in C_{\downarrow}^{\infty}$, podemos construir una función 2π -periódica $p(t)$ si definimos

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t + 2\pi k).$$

Calcule los coeficientes de Fourier en la serie

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

en términos de la transformada de Fourier de ϕ y muestre que

$$p(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(n).$$

4. Sea $T(\omega)$ el tren de pulsos dado por

$$T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n).$$

T es una distribución moderada.

- (a) Usando el ejercicio anterior, calcule el valor de $\langle T | \hat{\phi} \rangle$.
- (b) Muestre que la transformada de Fourier de T es

$$\hat{T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t + 2\pi k).$$

5. Muestre que cada función $\phi(t) \in C_{\downarrow}^{\infty}$ puede expresarse en la forma

$$\phi(t) = \phi(0)e^{-t^2} + t\psi(t)$$

donde $\psi(t)$ también pertenece a C_{\downarrow}^{∞} . Deduzca que las únicas distribuciones atemperadas $F(t) \in C_{\uparrow}^{-\infty}$ que satisfacen $tF(t) = 0$ son los múltiplos de la función $\delta(t)$.

Capítulo 16

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

En la teoría de transformadas de Fourier, la primera impresión que nos llevamos es que hay un gran contraste entre una función arbitraria $f(x)$ y las funciones $\phi(x) = e^{ix\omega}$, donde $\omega \in \mathbb{R}$. Estas funciones son particulares porque satisfacen la ecuación diferencial $\phi''(x) + \omega^2\phi(x) = 0$, esto es, ellas son autofunciones del operador $D^2 = d^2/dx^2$ con autovalor $\lambda = \omega^2 \geq 0$. En este espíritu, la transformada de Fourier apunta en la dirección contraria a este contraste, porque trata de mostrar que cualquier función $f(x)$ es una suma continua de autofunciones del operador D^2 .

En general, λ puede ser cualquier número complejo. Las soluciones de $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$ son

$$\phi(x) = \begin{cases} a e^{\mu x} + B e^{-\mu x} & \text{con } \mu^2 = -\lambda, \lambda \neq 0; \\ a x + b & \text{cuando } \lambda = 0. \end{cases}$$

Para que $\phi(x)$ esté acotada en $-\infty < x < \infty$, μ debe ser imaginario puro: si $\mu = \sigma + i\omega$ con $\sigma \neq 0$ entonces $|\phi(x)|$ tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ ó a $-\infty$. Por tanto, para que ϕ satisfaga $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$ y $\max_{-\infty < x < \infty} |\phi(x)| < \infty$, λ debe ser un número real no negativo y

$$\phi(x) = a e^{i\omega x} + b e^{-i\omega x}, \quad \omega^2 = \lambda.$$

Por tanto, el conjunto de autofunciones acotadas del operador d^2/dx^2 son suficientes para expresar, mediante superposición, casi cualquier función arbitraria $f(x)$, de acuerdo con la teoría usual de transformadas de Fourier.

16.1 Transformada seno

Examinemos lo que ocurre con las autofunciones acotadas sobre la semirrecta $x \geq 0$ que satisfacen una condición de borde

$$a\phi(0) = b\phi'(0),$$

donde $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a + b > 0$. Por ejemplo, con $\phi(0) = 0$ la solución general de

$$\phi''(x) + \lambda \phi(x) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

es,

$$\phi(x) = \begin{cases} a(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) & \text{con } \mu^2 = -\lambda \text{ cuando } \lambda \neq 0, \\ a x & \text{cuando } \lambda = 0. \end{cases}$$

Pero al imponer la condición de que $|\phi(x)|$ sea acotada en $x \geq 0$, la posibilidad de que μ sea igual a $\sigma + i\omega$, con $\sigma \neq 0$ queda eliminada. Permitiendo que a sea complejo vemos que $\phi(x) = a \operatorname{sen} \omega x$ es la única función que satisface $\phi(0) = 0$, $\phi''(x) = -\lambda \phi(x)$ para todo x en $0 \leq x$ y $\max_{x \geq 0} |\phi(x)| < \infty$.

Exactamente de la misma forma, la condición de borde $\phi'(0) = 0$ conduce a $\phi(x) = \cos \omega x$, que es, salvo constantes multiplicativas, la única autofunción acotada en $x \geq 0$.

Ahora, supongamos que una función arbitraria $f(x)$ está definida sólo en la semirrecta $x \geq 0$ y que queremos expresarla como una suma de autofunciones del operador d^2/dx^2 que se anulan en $x = 0$. Esto significa que estamos buscando alguna función $g(\omega)$ definida para $\omega \geq 0$ que satisfaga

$$f(x) = \int_0^\infty g(\omega) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega.$$

Si conociéramos una tal función $g(\omega)$, entonces tendríamos una manera de interpretar a la función f evaluada en x cuando x es negativo. De hecho, f con su dominio extendido sería una función impar en $-\infty < x < \infty$.

Así, definamos $F_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como la extensión impar de f

$$F_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \geq 0; \\ -f(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Apliquemos la transformada de Fourier usual sobre $-\infty < x < \infty$ y calculemos la transformada de F_i :

$$G_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} F_i(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x) F_i(x) \, dx$$

$$= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega x F_i(x) dx = \frac{-i}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \omega x f(x) dx$$

Observamos que G_i , como función de ω es una función impar. Por la teoría general, recuperamos a F_i a partir de G_i mediante la transformada inversa. Pero para $x \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= F_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x) G_i(\omega) d\omega \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \omega x G_i(\omega) d\omega = 2i \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \omega x G_i(\omega) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \omega x g(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Reconocemos que para $\omega \geq 0$, $g(\omega) = 2i G_i(\omega)$. Por tanto

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x dx \quad (16.1)$$

y

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(\omega) \operatorname{sen} \omega x d\omega \quad (16.2)$$

nos dicen cómo escribir una función $f(x)$ definida en $x \geq 0$ como una superposición de funciones $\operatorname{sen} \omega x$ con coeficientes $g(\omega)$, dados por 16.1.

A la ecuación 16.1 la llamaremos la *transformada de Fourier seno*.

16.2 Transformada coseno

¿En qué caso es necesaria la transformada de Fourier coseno?. Cuando haya que representar a la función $f(x)$ definida en $x \geq 0$ como una superposición de autofunciones $\phi(x)$ de d^2/dx^2 , que satisfagan la condición de borde $\phi'(0) = 0$. Esta $\phi(x)$ como vimos más arriba, son justamente las funciones $\cos \omega x$. Para resolver la ecuación integral

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(\omega) \cos \omega x dx$$

podemos aplicar la teoría usual de transformadas de Fourier sobre $-\infty < x < \infty$ a la extensión par de $f(x)$:

$$F_p(x) = \begin{cases} f(x), & \text{cuando } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{cuando } x < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$G_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} F_p(x) dx$$

se reduce a $(1/\pi) \int_0^{\infty} \cos \omega x f(x) dx$ cuando $x > 0$ y satisface $G_p(\omega) = G_p(-\omega)$.

Finalmente, recuperamos a $F_p(x)$ a partir de $G_p(\omega)$ mediante $F_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} G_p(\omega) d\omega$. Restringiendo a $x > 0$ y usando paridad terminamos con

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (16.3)$$

y

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(\omega) \cos \omega x d\omega \quad (16.4)$$

La ecuación (16.3) es la *transformada de Fourier coseno*.

Ejemplo 1 Supongamos que tenemos una placa metálica que ocupa el primer cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$, y mantengamos su borde a cero grados excepto por una fuente puntual de calor que colocamos en el punto $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Queremos encontrar la temperatura estacionaria $u(x, y)$ que alcanza este cuadrante, pasado un lapso de tiempo lo suficientemente largo.

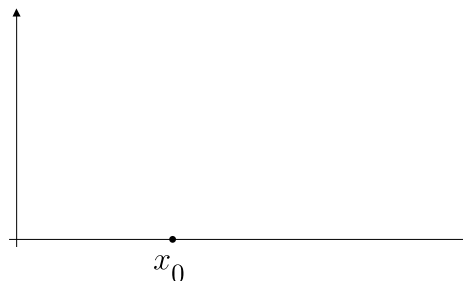


Figura 16.1

Esto significa que $u(x, y)$ debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) u(x, y) = 0$$

en $x \geq 0, y \geq 0$, mientras que

$$u(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad u(0, y) = 0.$$

Para resolver este problema usemos, como siempre, el método de separación de variables. Sea $v(x, y) = \phi(x)\psi(y)$. Insertemos a v en la ecuación de Laplace.

$$\Delta v(x, y) = \phi''(x)\psi(y) + \phi(x)\psi''(y) = 0.$$

Supongamos que ϕ y ψ satisfacen

$$\phi''(x) + \alpha\phi(x) = 0$$

y

$$\psi''(y) + \beta\psi(y) = 0.$$

Entonces

$$\Delta \phi \psi = -(\alpha + \beta)\phi \psi = 0.$$

y pedimos que $\beta = -\alpha$. Ahora bien, queremos que v sea una función acotada en $x \geq 0$, $y \geq 0$ y que satisfaga $v(0, y) = \phi(0)\psi(y) = 0$. Esto exige que $\phi(x)$ sea de la forma $\sin(\omega x)$, que $\alpha = \omega^2 > 0$, que $\beta = -\omega^2$ y que $\psi(y)$ sea de la forma $e^{-\omega y}$. De modo que la función

$$v(x, y) = g(\omega) \sin \omega x e^{-\omega y}$$

se acerca a la solución de nuestro problema en lo que se refiere a resolver $(\partial_x^2 + \partial_y^2)v = 0$ y $v(0, y) = 0$. Sin embargo, $v(x, 0) = g(\omega) \sin \omega x$ mientras que nosotros queremos $u(x, 0) = \delta(x - x_0)$. La idea es que una superposición apropiada de funciones $v(x, y)$ puede satisfacer esta última condición de borde. Aplicando la transformada de Fourier seno a $\delta(x - x_0)$ en $x \geq 0$ encontramos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \delta(x - x_0) \sin \omega x dx = \frac{2}{\pi} \sin \omega x_0,$$

por tanto

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega x_0 \sin \omega x d\omega.$$

Todo esto nos conduce a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega x_0 \sin \omega x e^{-\omega y} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{4} \right) \int_0^\infty e^{-\omega y} (e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}) (e^{i\omega x_0} - e^{-i\omega x_0}) d\omega \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\omega y} (-e^{-i\omega(-x+x_0)} - e^{i\omega(-x+x_0)} + e^{-i\omega(x+x_0)} + e^{i\omega(x+x_0)}) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-1}{x - x_0 - iy} + \frac{1}{x + x_0 - iy} + \frac{1}{x - x_0 + iy} - \frac{1}{x + x_0 + iy} \right) \\
&= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-2iy}{(x - x_0)^2 + y^2} + \frac{2iy}{(x + x_0)^2 + y^2} \right).
\end{aligned}$$

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \left(\frac{1}{D_1^2} - \frac{1}{D_2^2} \right),$$

donde D_1 y D_2 son las distancias de (x, y) a $(x_0, 0)$ y $(-x_0, 0)$ respectivamente.

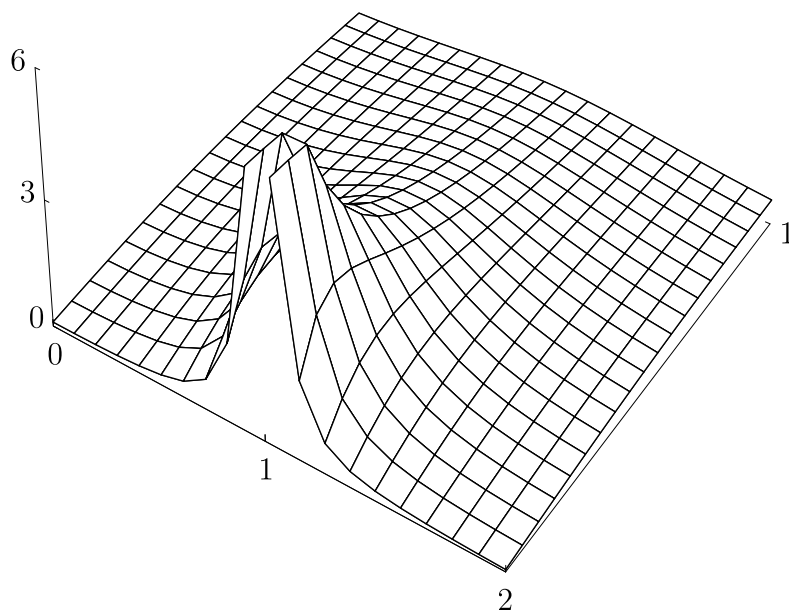


Figura 16.2

Ejemplo 2 Ecuación de Calor en $-\infty < x < \infty$ con fuente puntual de calor.

Queremos encontrar la función $u(x, t)$ definida en el semiplano superior $-\infty < x < \infty, t > 0$ que satisfaga la ecuación de calor

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t) \quad \text{con } \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(x).$$

$u(x, t)$ representa la temperatura de una barra de longitud infinita que en $t = 0$ estaba a temperatura cero y fué sometida a un pulso de calor concentrado en $x = 0$. El valor de la función u en (x, t) es la temperatura de la barra en el punto x y en el instante de tiempo t .

Solución: Como ya hemos visto, las autofunciones acotadas de d^2/dx^2 sobre $-\infty < x < \infty$ son justamente las $e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Para encontrar una solución particular de $(\partial_t - \partial_x^2)v = 0$, cuando

$$v(x, t) = e^{i\omega x} \psi(t),$$

basta hacer $\psi(t) = e^{-\omega^2 t}$. Proponemos escribir la función $u(x, t)$ como “suma” de estas soluciones multiplicadas por constantes que dependen de ω . Esto es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} e^{-\omega^2 t} d\omega$$

Para encontrar cuál es $g(\omega)$ podemos aplicar la teoría de las transformadas de Fourier a las distribuciones atemperadas. En este problema, la condición inicial dice que cuando t tiende a cero la función u tiende a la delta de Dirac concentrada en cero. Puesto que para cada $\omega \in \mathbb{R}$ $e^{-\omega^2 t}$ tiende a 1 cuando t tiende a cero tenemos

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Así,

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi}$$

y

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-\omega^2 t} d\omega.$$

Esta integral es la transformada de Fourier de una campana de Gauss. Recordemos del ejemplo 5 que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} dx$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{i\omega x} d\omega$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} e^{ixs/\sqrt{2t}} \frac{ds}{\sqrt{2t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x/\sqrt{2t})^2/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variables $\omega = s/\sqrt{2t}$.

La solución u es una función C^∞ , en el semiplano superior. Para ver que u satisface la ecuación de calor podemos ver las derivadas logarítmicas

$$\frac{u_t}{u} = -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}, \quad \frac{u_x}{u} = -\frac{x}{2t}, \quad \frac{u_{xx}}{u} = \left(\frac{u_x}{u}\right)_x + \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 = -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}.$$

La función $u(x, t)$ satisface la condición inicial en el siguiente sentido. Para t fijo, podemos ver a u como una función generalizada en el espacio de funciones continuas acotadas. Usando lo que vimos en el capítulo 3 sobre series de distribuciones que convergen a la delta, es fácil ver que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(x)$.

Ejemplo 3 Evolución de un pulso cuadrado de calor.

Queremos resolver

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

en el semiplano superior $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$ y donde $u(x, t)$ satisface la condición inicial $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = p(x)$ con

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Solución: Usando los resultados del ejemplo anterior, podemos escribir la solución del problema como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-\omega^2 t} e^{ix\omega} d\omega.$$

Para hallar a $g(\omega)$ usamos la condición inicial,

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{ix\omega} d\omega.$$

De modo que

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Concluimos que la solución buscada es

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{-\omega^2 t} e^{ix\omega} d\omega$$

No podemos calcular la integral explícitamente pero podemos hacer algunas observaciones sobre $u(x, t)$.

1. A pesar de las discontinuidades de $p(x) = u(x, t)|_{t \rightarrow 0}$, la función $u(x, t)$, como función de x es, para todo $t > 0$ una función de prueba del espacio de Schwartz. Esto es así porque $u(x, t)$ es la transformada de inversa de

$$G_t(\omega) = \frac{\text{sen } \omega}{\pi \omega} e^{-\omega^2 t},$$

donde $G_t(\omega) \in C_{\downarrow}^{\infty}$. Como la transformada inversa de una función del espacio de Schwartz es de nuevo una función en este espacio, concluimos que $u(x, t) \in C_{\downarrow}^{\infty}$. Para ver que $G_t(\omega) \in C_{\downarrow}^{\infty}$ observemos que la función $\text{sen } \omega / \omega$ es una función analítica y acotada en \mathbb{R} (tiene una singularidad removible en $\omega = 0$). Como $e^{-\omega^2 t} \in C_{\downarrow}^{\infty}$ entonces $G_t(\omega)$ también.

2. La energía térmica total no depende del tiempo. A medida que el tiempo transcurre, $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ permanece constantemente igual a 2. En efecto, para cada t tenemos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega}{\pi \omega} e^{-\omega^2 t} e^{i x \omega} d\omega$$

La transformada de Fourier nos da

$$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{-\omega^2 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, t) dx.$$

Evaluemos en $\omega = 0$ para confirmar que

$$2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \quad \text{para todo } t > 0.$$

En la figura 16.3 se presenta los perfiles de temperatura en distintos instantes de tiempo.

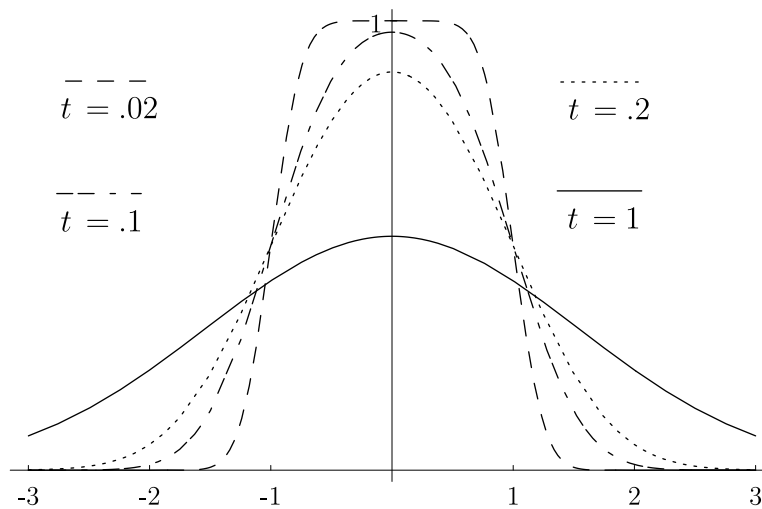


Figura 16.3

Ejercicios

1. Halle una función $h(\omega)$, continua y L^1 en $0 < \omega < \infty$, tal que $x e^{-x} = \int_0^\infty h(\omega) \operatorname{sen}(\omega x) d\omega$ para todo $0 \leq x < \infty$.
2. En el cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ determine un campo escalar acotado $u(x, y)$, que satisfaga las siguientes condiciones:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u \equiv 0,$$

junto con

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x e^{-x}, & \text{para } x \geq 0; \\ u(0, y) &= 0, & \text{para } y \geq 0. \end{aligned}$$

3. Usando el hecho de que la desigualdad

$$\frac{\omega}{(1 + \omega^2)^2} \leq \frac{1}{2},$$

es válida para $0 \leq \omega$, pruebe que $|u(x, y)| \leq 2/(\pi y)$ para $u(x, y)$ la solución del problema anterior.

4. Sobre la semirrecta $0 \leq x < \infty$, represente la función $F(x) = (1+x)e^{-x}$ como una superposición continua de las funciones $\cos(\omega x)$, en $0 \leq \omega < \infty$.
5. La temperatura $u(x, t)$ en una barra semi-infinita $0 \leq x < \infty$, vale $u(x, 0) = (1+x)e^{-x}$ en $t = 0$, pero en el extremo $x = 0$ está aislada térmicamente, es decir: $\lim_{x \downarrow 0} \partial_x u(x, t) = 0$ para todo $0 \leq t$. Si la ecuación de calor $\partial_t u = \partial_x^2 u$ se cumple en $x > 0$, $t > 0$, determine $u(x, t)$ en forma de una integral iterada, usando el ejercicio anterior.
6. Con miras a la condición de borde mixta $\phi(0) = \phi'(0)$, examinemos la fórmula de la transformada de inversa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} g(\omega) d\omega.$$

Para que cada $\phi(x) = e^{ix\omega} g(\omega) + e^{ix\omega} g(-\omega)$ cumpla $\phi(0) = \phi'(0)$, demuestre que es necesario y suficiente que $(1 - i\omega)g(\omega)$ sea impar sobre $-\infty < \omega < \infty$.

7. Se quiere que $f(x) \in C_{\downarrow}^{\infty}$ sea una superposición continua de ondas trigonométricas que cumplen $\phi(0) = \phi'(0)$. A la luz del ejercicio anterior examine la transformada de Fourier

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} f(x) dx,$$

y pruebe que es suficiente que $f(x) - f'_{\text{gen}}(x)$ sea impar sobre $-\infty < x < \infty$.

8. Dada $\delta(x-a)$ con $0 < a < \infty$ y en vez de construir la extensión par o impar al intervalo $-\infty < x < \infty$, se puede construir $f(x) \in C_{\uparrow}^{-\infty}$ con $f(x) - f'(x) = \delta(x-a) - \delta'(x-a) - \delta'(x+a) - \delta(x+a)$ en todo \mathbb{R} , mientras $f(x) = \delta(x-a)$ en $0 < x < \infty$. Obtener

$$g(\omega) = (\omega - i) \frac{\text{sen } a\omega + \omega \cos a\omega}{\pi(1 + \omega^2)},$$

$$\delta(x-a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\omega \cos \omega x + \text{sen } \omega x)(\omega \cos a\omega + \text{sen } a\omega)}{1 + \omega^2} d\omega$$

sobre $0 < x < \infty$. Cada $\phi(x) = \omega \cos \omega x + \text{sen } \omega x$, cumple $\phi(0) = \phi'(0)$.

9. Vimos que $(2 \operatorname{sen} w R)/w$ puede verse como la transformada del impulso rectangular que vale uno en $|x| \leq R$ y cero si $|x| > R$. Verifique que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} R\omega}{\omega} e^{-\omega^2} d\omega = \pi.$$

Sugerencia: cambiar la integral en “ $d\omega$ ” por otra integral en “ dx ” observando que la transformada inversa de $e^{-\omega^2}$ es $e^{-x^2/4}/\sqrt{\pi}$.

10. Cada función de prueba $\phi(x)$ del espacio de Schwartz C_{\downarrow}^{∞} puede presentarse como

$$\phi(x) = \phi(0)e^{-x^2} + x\psi(x),$$

donde $\psi \in C_{\downarrow}^{\infty}$ también. Usando este hecho, confirme que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} Rx}{x} = \pi\delta(x)$$

en el contexto de las funciones generalizadas atemperadas, esto es, evalúe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\operatorname{sen} Rx}{x}, \phi(x) \right\rangle.$$

11. De acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora, el impulso unitario sobre $-R < x < R$ puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \frac{\operatorname{sen} R\omega}{\omega} d\omega$$

Definamos ahora

$$F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -R \\ \cos x & \text{si } -R < x < R \\ 0 & \text{si } R \leq x \end{cases}$$

- (a) Aplicando teoremas operacionales, muestre que

$$G_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} R(\omega - 1)}{\omega - 1} + \frac{\operatorname{sen} R(\omega + 1)}{\omega + 1} \right)$$

satisface la fórmula

$$F_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} G_R(\omega) d\omega.$$

- (b) Aplique el ejercicio anterior par calcular $\lim_{R \rightarrow \infty} G_R(\omega)$. Compárelo con la solución ya conocida para

$$\cos x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} G_{\infty}(\omega) d\omega.$$

12. Una onda $\cos x \cos t$ en $t < 0$ se tropieza con algo, en el instante $t = 0$ que lo anula fuera del intervalo $|x| \leq R$. Luego, para $t > 0$ y $-\infty < x < \infty$, la función $u(x, t)$ cumple con la ecuación de onda $\partial_t^2 = \partial_x^2 u$, con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) \Big|_{t=0} &= 0 \\ u(x, 0) &= F_R(x) \end{aligned}$$

donde F_R aparece en el ejercicio anterior. Halle $u(x, t)$ y verifique que su tendencia es el de volver a coincidir con $\cos x \cos t$ en $t > 0$ a medida que $R \rightarrow \infty$.

13. Se define la función error mediante

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

E es una función impar, acotada y está determinada por $E'(x) = e^{-x^2/2}$ con $E(0) = 0$. Pero

$$e^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos x\omega e^{-\omega^2/2} d\omega.$$

Compruebe que

$$E(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x\omega}{\omega} e^{-\omega^2/2} d\omega.$$

14. Grafique $f(x) = H(x) - H(-x)$. Como función generalizada, $f'_{\text{gen}}(x) = 2\delta(x) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} d\omega$. Esto parece indicar que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega}}{i\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x\omega)}{\omega} d\omega.$$

Resuelva la ecuación de calor $\partial_t u = \partial_x^2 u$ en el dominio $-\infty < x < \infty$, $0 < t$ con la condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = H(x) - H(-x).$$

Exprese $u(x, t)$ explícitamente en términos de la función error $E(x)$ introducida en el ejercicio anterior.

Capítulo 17

Armónicos Esféricos en \mathbb{R}^3

17.1 Ejemplos de funciones armónicas

Definición 17.1 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 . A las funciones diferenciables, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen con

$$\Delta u = 0 \tag{17.1}$$

donde $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ las llamaremos funciones armónicas.

Un ejemplo de una función que satisface la ecuación 17.1 es el potencial u creado por una partícula cargada colocada en el origen: $u(x, y, z) = 1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ con $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$.

A partir de esta solución podemos generar otras funciones armónicas tomando derivadas parciales de $u = 1/r$ por ejemplo con respecto a z . Las funciones así generadas están asociadas con momentos multipolares. En particular tenemos

$$\begin{aligned} -\partial_z \frac{1}{r} &= \frac{z}{r^3}, \\ \frac{1}{2} \partial_z^2 \frac{1}{r} &= \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5}, \\ (-1)^m \frac{1}{m!} \partial_z^m \frac{1}{r} &= \frac{H_m(x, y, z)}{r^{2m+1}} \end{aligned} \tag{17.2}$$

Todas estas funciones satisfacen la ecuación (1) porque el operador de Laplace conmuta con el operador $(\partial_z)^k$. Los numeradores $H_m(x, y, z)$ son polinomios homogéneos de grado m , tal y como puede deducirse de la fórmula

de recursión

$$H_{m+1} = \frac{1}{m+1} \left((2m+1)z H_m - r^2 \partial_z H_m \right).$$

Vamos a ver a continuación que cada una de las funciones H_m satisfice $\Delta H_m = 0$.

Otra forma de generar funciones armónicas consiste en considerar los términos de la serie de Laurent en torno al origen de una función armónica que no tenga singularidades en alguna vecindad del origen. Podemos tomar por ejemplo la función

$$v(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}},$$

que representa el potencial eléctrico creado por una partícula puntual colocada en el punto $(0, 0, 1)$. Un método para obtener los primeros términos de la serie proviene del teorema del binomio.

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= (1 + (r^2 - 2z))^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(r^2 - 2z) + \frac{3}{8}(r^2 - 2z)^2 - \dots \\ &= 1 + z + \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + \dots \\ &= 1 + A_1(x, y, z) + A_2(x, y, z) + \dots \end{aligned}$$

en donde A_m es un polinomio homogéneo de grado m . El hecho de que $\Delta v = 0$ implica que para cada m , $\Delta A_m = 0$, porque el operador de Laplace mantiene separadas funciones homogéneas de distinto grado¹.

No es una casualidad que $H_m = A_m$ para $m = 0, 1, 2, \dots$. En efecto, para (x, y, z) fijo, con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, las funciones $u(x, y, z-t) = 1/\alpha$ y $v(tx, ty, tz) = 1/\beta$ coinciden porque las distancias α y β son iguales. De hecho, $\alpha = \beta = \sqrt{1 - 2tz + t^2}$ para todo t .

Las siguientes son fórmulas explícitas para H_m y A_m :

$$\begin{aligned} A_m(x, y, z) &= \frac{1}{m!} \frac{d^m v}{dt^m}(tx, ty, tz) \Big|_{t=0}, \\ H_m(x, y, z) &= \frac{1}{m!} \frac{d^m u}{dt^m}(x, y, z-t) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

¹Aquí se usó el siguiente hecho: Una suma finita de polinomios homogéneos se anula idénticamente si y sólo si cada uno de los polinomios es idénticamente nulo. Este hecho se generaliza a sumas infinitas de polinomios homogéneos.

Las funciones A_m y H_m son los coeficientes de la expansión en series de Taylor de $u(x, y, z - t) = v(tx, ty, tz)$ en un entorno de $t = 0$ (aquí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$), pero como ambas son homogéneas del mismo grado, tenemos que $A_m = H_m$ en todos los puntos de \mathbb{R}^3 . Finalmente, vimos que $\Delta A_m = 0$, por tanto $\Delta H_m = 0$ también.

17.2 Polinomios de Legendre

Hemos visto que en puntos (x, y, z) de la esfera unitaria, el polinomio H_m viene dado como un coeficiente en la serie de Laurent de la función

$$t \rightarrow (1 - 2zt + t^2)^{-1/2}$$

Por tanto hacemos la siguiente

Definición 17.2

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)t^m$$

donde los coeficientes $P_m(z)$ son los polinomios de Legendre en una variable z .

Así, si (x, y, z) es un punto de la esfera unitaria tenemos que

$$H_m(x, y, z) = P_m(z).$$

He aquí los primeros polinomios de Legendre. $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = (3z^2 - 1)/2$, $P_3(z) = (5z^3 - 3z)/2$.

Para calcular los valores de las funciones H_m sobre puntos (x, y, z) que no están sobre la esfera unitaria aprovechamos el hecho de que estas funciones son homogéneas:

$$H_m(x, y, z) = H_m\left(r\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)\right) = r^m H_m\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = r^m P_m\left(\frac{z}{r}\right).$$

Esta expresión se simplifica ligeramente si tomamos coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

En estas coordenadas, $H_m(x, y, z)$ toma la forma $r^m P_m(\cos \theta)$. La restricción de $H_m(x, y, z)$ a la esfera unitaria produce bandas horizontales alternadas positivas y negativas.

Los polinomios de Legendre satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales que son consecuencia de

$$\Delta(r^m P_m(\cos \theta)) = 0.$$

De hecho, se puede verificar que la función $\cos \theta = w(x, y, z) = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ satisface

$$r^2((\partial_x w)^2 + (\partial_y w)^2 + (\partial_z w)^2) = 1 - w^2, \quad (17.3)$$

$$r^2 \Delta w = -2w. \quad (17.4)$$

De forma tal que si P es una función de una sola variable entonces

$$r^2 \Delta P(w) = (1 - w^2) P''(w) - 2w P'(w).$$

En la próxima sección veremos que $\Delta r^m = m(m+1)r^{m-2}$. Combinando estos dos resultados encontramos que

$$r^2 \Delta(r^m P(w)) = r^m((1 - w^2) P''(w) - 2w P'(w) + m(m+1) P(w))$$

Este resultado nos permite la siguiente

Definición 17.3 El operador de Legendre en una sola variable z está dado por

$$L = (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + m(m+1)\mathbb{I}.$$

El operador de Legendre preserva el espacio vectorial de dimensión finita de los polinomios en una sola variable de grado $\leq m$. Este operador es diagonalizado por los polinomios de Legendre $\{P_k(z)\}$ con $0 \leq k \leq m$ los cuales satisfacen

$$L(P_k(z)) = -k(k+1)P_k(z).$$

El operador L es formalmente simétrico ya que puede escribirse en la forma $L = d/dz((1 - z^2)d/dz)$. Esto nos conduce al siguiente resultado importante.

Teorema 17.1 Los polinomios de Legendre $\{P_m(z)\}$ forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-1 \leq z \leq 1$

En efecto, si $0 \leq m < n$ entonces

$$\begin{aligned} -n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz &= \int_{-1}^1 P_m(z) \frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{dP_n(z)}{dz} \right) dz \\ &= P_m(z) (1-z^2) P_n'(z) \Big|_{z=-1}^{z=1} \\ &\quad - \int_{-1}^1 P_m'(z) (1-z^2) P_n'(z) dz. \end{aligned}$$

Este último resultado es simétrico en n y m . Intercambiando $m \leftrightarrow n$ encontramos que

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz.$$

Puesto que $m(m+1) \neq n(n+1)$ concluimos que

$$\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0.$$

Con esto, el teorema queda demostrado.

Por otra parte, se puede demostrar, usando la función generatriz de los polinomios de Legendre que

$$\int_{-1}^1 (P_m(z))^2 dz = \frac{2}{2m+1}$$

La demostración de este hecho se deja en el ejercicio 6.

Todo lo hasta aquí expuesto, sugiere que podemos expandir cualquier función $f(z)$ definida en el intervalo $-1 \leq z \leq 1$ en una serie de polinomios de Legendre:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(z)$$

en donde los coeficientes c_m se determinan mediante

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(z) P_m(z) dz.$$

(Cuando $f(z)$ es un polinomio, esta serie es finita y representa a la función exactamente.)

Estas series son un caso especial de expansiones en armónicos esféricos, tema que tocaremos más adelante.

17.3 El espacio de Armónicos Esféricos

El polinomio $H_m(x, y, z)$ es un ejemplo de un *armónico esférico* de grado m en \mathbb{R}^3 : es una función polinomial $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} E Q &= m Q, \\ \Delta Q &= 0, \end{aligned}$$

donde $E = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ es el operador de Euler en \mathbb{R}^3 . La primera ecuación solamente expresa el hecho de que Q es una función homogénea de grado m .

Definición 17.4 Al conjunto de todos los armónicos esféricos de grado m lo denotaremos con $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$.

$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ es un espacio vectorial de dimensión $2m+1$. Por ejemplo, $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ es el espacio vectorial generado por todas las combinaciones lineales de los cinco elementos $\{x^2 - y^2, y^2 - z^2, xy, xz, yz\}$. De hecho, $H_2 = (1/2)(2z^2 - x^2 - y^2)$ es una combinación lineal de $x^2 - y^2$ y $y^2 - z^2$.

A partir de las dos ecuaciones que definen los armónicos esféricos, se tiene también el siguiente resultado, sugerido por el ejemplo de los potenciales multipolares.

Teorema 17.2 Si $Q \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ entonces

$$\Delta \left(\frac{Q(x, y, z)}{r^{2m+1}} \right) = 0.$$

Demostración. Sea $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w(x, y, z) = f(r) Q(x, y, z)$$

donde f es cualquier función diferenciable de una sola variable y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{x}{r}, \\ \partial_x^2 r &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \end{aligned}$$

y

$$\Delta r = \frac{2}{r}.$$

El Laplaciano del producto de dos funciones $g(x, y, z)$ y $h(x, y, z)$ es

$$\Delta(gh) = g \Delta h + (\Delta g) h + 2(\partial_x g \partial_x h + \partial_y g \partial_y h + \partial_z g \partial_z h).$$

Tomando $g(x, y, z) = f(r)$ y $h(x, y, z) = Q(x, y, z)$ encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta(f(r) Q) &= 0 + Q(x, y, z) \left(f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \right) \\ &\quad + 2 \left(f'(r) \frac{x}{r} \partial_x Q + f'(r) \frac{y}{r} \partial_y Q + f'(r) \frac{z}{r} \partial_z Q \right) \\ &= \left(f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \right) Q + \frac{2}{r} f'(r) E Q \\ &= \left(f''(r) + \frac{2 + 2m}{r} f'(r) \right) Q. \end{aligned}$$

Esta es la fórmula general para el Laplaciano de una función radial en \mathbb{R}^3 multiplicada por un armónico esférico de grado m . En el caso especial para el cual $f(r) = r^\alpha$ con α arbitrario, tenemos que

$$f''(r) + \frac{2 + 2m}{r} f'(r) = \alpha(\alpha + 2m + 1)r^{\alpha-2}$$

y

$$\Delta(r^\alpha Q) = \alpha(\alpha + 2m + 1)r^{\alpha-2} Q.$$

Esto confirma que $\alpha = 0$ y $\alpha = -(2m + 1)$ son los únicos exponentes que hacen de $r^\alpha Q$ una función armónica. Aquí termina la demostración.

17.4 Funciones de Legendre Asociadas

Hasta ahora, el único elemento de $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ que hemos visto, es la función H_m que fué construida a partir de los polinomios de Legendre P_m . ¿Como podemos generar más armónicos esféricos a partir de las funciones H_m ?

Para esto, entran en juego las rotaciones en \mathbb{R}^3 . Cada eje de rotación tiene su propio operador de rotaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} L_x &= y\partial_z - z\partial_y \\ L_y &= z\partial_x - x\partial_z \\ L_z &= x\partial_y - y\partial_x \end{aligned}$$

(ver el ejercicio 8). Todos estos operadores preservan el espacio de todos los polinomios homogéneos de grado m , $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^3)$. Más aún, todos conmutan con el operador de Laplace: se puede verificar directamente que para cualquier función diferenciable w , $\Delta L_z w = L_z \Delta w$. Por tanto, cada operador de rotación infinitesimal genera una transformación lineal de $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ en sí mismo.

Si aplicamos el operador $L_z = x\partial_y - y\partial_x$ a la función $H_m(x, y, z)$ no ocurre nada interesante puesto que estas funciones son invariantes con respecto a las rotaciones en torno al eje z . H_m puede verse como una función que depende de $x^2 + y^2$ y de z , y por tanto, $L_z H_m = 0$.

Por lo anteriormente expuesto, para generar otros armónicos esféricos a partir de H_m , debemos usar L_x y L_y .

Definición 17.5 Sea M el operador dado por

$$M = iL_x - L_y = (x + iy)\partial_z - z(\partial_x + i\partial_y)$$

Evidentemente, $M : \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$.

Si miramos $P_m(z)$ como un campo escalar en \mathbb{R}^3 , obtenemos

$$\begin{aligned} M P_m &= (x + iy) \frac{d}{dz} P_m(z) \\ M^k P_m &= (x + iy)^k \left(\frac{d}{dz} \right)^k P_m(z) \end{aligned}$$

porque, debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann de análisis complejo, $(\partial_x + i\partial_y)(x + iy)^p = 0$. Ciertamente, las funciones $P_m(z)$ y $H_m(x, y, z)$ no son iguales como campos escalares en \mathbb{R}^3 . Pero su diferencia se anula sobre la esfera unitaria. Por esta razón, esta diferencia tiene la forma $(x^2 + y^2 + z^2 - 1)S(x, y, z)$. Las funciones que tienen esta forma son transformadas en sí mismas por todas los operadores de rotaciones infinitesimales. Por ejemplo, $L_x((x^2 + y^2 + z^2 - 1)S(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)L_x S(x, y, z)$. En consecuencia la igualdad

$$M^k H_m(x, y, z) = (x + iy)^k \left(\frac{d}{dz} \right)^k P_m(z),$$

es válida siempre y cuando nos mantengamos sobre la superficie de la esfera unitaria. Para obtener una fórmula para un punto general (x, y, z) en \mathbb{R}^3

dividimos por $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ para proyectar a la esfera unitaria:

$$\begin{aligned} M^k H_m(x, y, z) &= H_m^k(x, y, z) \\ &= r^m (M^k H_m)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = r^m \left(\frac{x}{r} + i \frac{y}{r}\right)^k P_m^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) = \\ &= r^m \left(\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^k \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right)^k P_m^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) \\ &= r^m e^{ik\phi} (\sin \theta)^k P_m^{(k)}(\cos \theta), \end{aligned}$$

donde hemos escrito

$$e^{i\phi} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

y hemos reemplazado (x, y, z) por las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) .

Para simplificar la expresión obtenida en (4) hacemos la siguiente

Definición 17.6 Dado un entero $k \geq 0$ definimos la k -ésima función de Legendre asociada mediante

$$P_m^k = (1 - s^2)^{k/2} \left(\frac{d}{ds}\right)^k P_m(s).$$

Cuando $k = 0$ esta expresión nos devuelve $P_m(s)$. Para enteros $k < 0$ tomamos $P_m^k(s) = P_m^{|k|}(s)$.

Como consecuencia de esta definición resulta que $P_m^k(s)$ es distinto de cero sólo cuando $-m \leq k \leq m$, porque P_m es un polinomio de grado m y $M^k H_m = r^m e^{ik\phi} P_m^k(\cos \theta)$. En resumen, comenzando con H_m hemos construido $2m + 1$ elementos de $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$. Que ellos formen una base ortogonal de $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ con respecto a la integración sobre la esfera, es básicamente una consecuencia de $\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')\phi} d\phi = 0$. Para los valores extremos $k = \pm m$, $r^m e^{i m \phi} P_m^k(\cos \theta)$ se reduce a $(x \pm iy)^m$ que igualmente puede verse como un armónico esférico en sólo dos variables.

17.5 Relaciones de Ortogonalidad

Acabamos de ver que $(x + iy)^m = u(x, y) + i v(x, y)$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas implican que u y v son funciones armónicas. Puesto que ellas son obviamente polinomios homogéneos de grado

m encontramos que $u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ o equivalentemente $(x + iy)^m, (x - iy)^m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$.

El caso de los armónicos esféricos en dos variables reales es mucho más simple que en tres. No hay necesidad de los polinomios de Legendre y $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ es un espacio vectorial de dimensión 2 para $m \geq 1$.

Cuando restringimos $(x \pm iy)^m$ al círculo unitario $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ encontramos $e^{\pm im\phi}$.

Hemos aprendido que una función arbitraria en S^1 puede expandirse en series de Fourier y que la ortogonalidad de las funciones trigonométricas juega un papel esencial.

Para desarrollar un programa similar en $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, tenemos que reinterpretar la fórmula de ortogonalidad de las series de Fourier $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 0$ en el contexto de los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$. Esto no es difícil:

Teorema 17.3 (Ortogonalidad de los armónicos esféricos en S^2) Sea $0 \leq m < m'$. Escojamos $Q_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ y $Q_{m'} \in \mathcal{H}_{m'}(\mathbb{R}^3)$. Entonces

$$\int_{S^2} Q_m Q_{m'} = 0.$$

Aplicamos la fórmula de Green en la esfera sólida $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, cuyo borde es la esfera unitaria S^2 . El vector normal, exterior en un punto \mathbf{x} de la superficie de la esfera es el vector \mathbf{x} mismo, visto como un vector velocidad. La derivada direccional $\partial u / \partial r$ de un campo escalar u respecto a ese vector velocidad es justamente el operador de Euler $Eu = x\partial_x u + y\partial_y u + z\partial_z u$. El teorema de Green en este contexto toma la fórmula

$$\int_{\omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{S^2} (u Ev - v Eu)$$

Tomando $u = Q_m(x, y, z) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ y $v = Q_{m'} \in \mathcal{H}_{m'}$ obtenemos

$$0 = (m' - m) \int_{S^2} Q_m Q_{m'}.$$

Pero $m' - m \neq 0$ y esto concluye la demostración.

Finalmente, se puede demostrar, no sin cierta dificultad que

$$\int_{S^2} H_m^k \bar{H}_m^k = \frac{4\pi}{2m+1} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}$$

El lector puede tener la impresión de que los esféricos armónicos son pocos y están muy “separados” entre si. En realidad, ocurre lo contrario: junto con las potencias de $x^2 + y^2 + z^2$ ellos generan todos los polinomios en tres variables. Sea $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^3)$ el espacio de todos los polinomios homogéneos $\phi(x, y, z)$ de grado m . Tenemos la siguiente

Teorema 17.4

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{R}^3) \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{R}^3)$$

donde $m - 2k = 0$ ó 1 , dependiendo de que m sea par o impar.

Para $m = 0$ y $m = 1$ los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^3)$ son el mismo espacio. Con el objeto de desarrollar una demostración por inducción, supongamos que la proposición es cierta para algún entero $m > 0$. Observemos que si $\phi \in \mathcal{P}_{m+2}(\mathbb{R}^3)$ entonces $\Delta \phi \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^3)$, así, por la hipótesis de inducción, podemos escribir

$$\Delta \phi = \sum_{2p+q=m} r^{2p} A_q(x, y, z)$$

donde $A_q \in \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^3)$, $p \geq 0$ y $q \geq 0$. En la sección 3, vimos que el Laplaciano de $r^{2p+2} A_q(x, y, z)$ es un múltiplo positivo de $r^{2p} A_q(x, y, z)$. Por tanto, podemos escoger constantes positivas $c_{p,q}$ de manera que la función

$$\psi = \sum c_{p,q} r^{2p+2} A_q(x, y, z)$$

satisfaga $\Delta \psi = \Delta \phi$. Entonces podemos escribir ϕ como

$$\phi = (\phi - \psi) + \psi.$$

Pero $(\phi - \psi) \in \mathcal{H}_{m+2}(\mathbb{R}^3)$ porque ambos son polinomios homogéneos de grado $m + 2$ y porque $\Delta(\phi - \psi) = 0$ mientras que ψ ya tiene la forma requerida por la proposición cuya demostración ahora está completa.

Por tanto, todo polinomio en \mathbb{R}^3 es una suma finita de potencias de $x^2 + y^2 + z^2$ multiplicadas por armónicos esféricos. En esta demostración no se usó la integración sobre la esfera. Sin embargo, el $A_q \in \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^3)$ para ϕ dado, puede determinarse de una forma más directa mediante integración.

A continuación vamos a ver que cada campo escalar suave en \mathbb{R}^3 es una suma infinita de funciones radiales multiplicadas por armónicos esféricos.

Para este propósito, sea $\{B_0(x, y, z), B_1(x, y, z), \dots\}$ una unión de bases ortogonales de todos los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$; Por ejemplo, $\{B_n\}_{n=0}^\infty$ podría consistir de todas las funciones $H_m^k(x, y, z) = r^m e^{ik\phi} P_m^k(\cos \theta)$ donde $m \geq 0$ y $-m \leq k \leq m$.

Para cada campo escalar diferenciable $f(x, y, z)$ definido en un subconjunto U de \mathbb{R}^3 de la forma $\rho_1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \rho_2$, existen funciones $C_n(t)$ que dependen de una sola variable $\rho_1 < t < \rho_2$ tales que

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) B_n(x, y, z)$$

en el dominio de f . Más aún, el valor de la n -ésima función coeficiente $C_n(t)$ en algún $\rho_1 < t < \rho_2$ puede hallarse a partir de

$$\int_{|\mathbf{x}|=t} f B_n = C_n(t) \int_{|\mathbf{x}|=t} B_n^2$$

Pero la esfera unitaria debería servir para éstas integrales. Cuando (x, y, z) recorre la esfera unitaria (tx, ty, tz) recorre la esfera de radio $t > 0$, magnificando el área por un factor de t^2 . Este factor aparece en ambos miembros de la ecuación, dando

$$t^2 \int_{|\mathbf{x}|=1} f(tx, ty, tz) B_n(tx, ty, tz) = t^2 C_n(t) t^m \int_{|\mathbf{x}|=1} (B_n(tx, ty, tz))^2$$

i. e

$$\int_{|\mathbf{x}|=1} f(tx, ty, tz) B_n(x, y, z) = C_n(t) t^m \int_{|\mathbf{x}|=1} (B_n(x, y, z))^2$$

donde m es el grado de homogeneidad de B_n .

Este es el análogo tridimensional de las series de Fourier. La teoría de convergencia es muy similar; en particular, es válido tomar derivadas término a término cuando $f(x, y, z) \in C^\infty$.

Cuando f es un polinomio, el teorema se reduce a la proposición que lo precede, y los coeficientes $C_n(t)$ son polinomios en t^2 . En este caso particular, hemos presentado una demostración completa.

En vez de probar el caso general, vamos a describir algunas aplicaciones de la expansión en esféricos armónicos.

17.6 Expansión en Armónicos Esféricos

Ejemplo 1 Mediante una expansión en armónicos esféricos, la ecuación $\Delta u = f$ en \mathbb{R}^3 se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) B_n(x, y, z)$$

y

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) B_n(x, y, z),$$

entonces la igualdad $\Delta u = f$ se cumple si y sólo si

$$\ddot{K}_n(t) + \frac{2(1+m)}{t} \dot{K}_n(t) = C_n(t)$$

para todo $n \geq 0$ y $\rho_1 < t < \rho_2$ y donde m es el grado de homogeneidad de $B_n(x, y, z)$. En particular, la ecuación $\Delta u + u = 0$ se reduce al conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\ddot{K}_n(t) + \frac{2(1+m)}{t} \dot{K}_n(t) + K_n(t) = 0.$$

El cambio de variables $k(t) = t^{-m-1/2} J(t)$ transforma esta ecuación diferencial en la ecuación de Bessel

$$t^2 J(t) + t \dot{J}(t) + (t^2 - \nu^2) J(t) = 0$$

con $\nu = \pm(m + 1/2)$.

Volvamos a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Esta ecuación es satisfecha sólo si todas las funciones coeficiente tienen la forma $K_m(r) = A_m + B_m/r^{2m+1}$.

Supongamos que la función u está definida en la región exterior, $0 < R < |\mathbf{x}| < \infty$, que satisface $\Delta u = 0$ y que $|u(x, y, z)|$ está acotada por c/r donde c es una constante. Entonces u sólo puede tener la forma

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{r^{2n+1}} B_n(x, y, z),$$

en donde $B_n \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$, para los distintos valores de m y n .

17.7 Problema de Dirichlet

Existe una forma general para el campo escalar $u(x, y, z)$ en la región interior $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ que satisfaga $\Delta u = 0$:

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_n(x, y, z)$$

En contraste, un campo escalar cualquiera tiene la forma general

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) B_n(x, y, z)$$

y no es en general armónico porque los coeficientes pueden no tener la forma requerida. Sin embargo, podemos modificar esta situación, fijando un valor $0 < t < R$ y reemplazando los coeficientes de $C_n(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ por su valor en t para definir así

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) B_n(x, y, z)$$

una función armónica cuyo valor en los puntos de la esfera $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t$ coinciden con los de la función f sobre la misma esfera. En principio, el problema interior de Dirichlet ha sido resuelto: dada una función arbitraria f definida sobre los puntos de una esfera, hemos encontrado una función armónica definida en la región rodeada por la esfera tal que sus valores en la esfera misma coinciden con los valores de f .

Ejemplo 2 Consideremos $f(x, y, z) = z^3$. $f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}^3)$. Por lo que hemos visto, su expansión en armónicos sólo va a involucrar a elementos que pertenezcan a $\mathcal{H}_3(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$

$$z^3 = r^3 \cos^3 \theta = r^2 \sum_{k=-1}^1 c_{1,k} H_1^k(r, \theta, \phi) + \sum_{k=-3}^3 c_{3,k} H_3^k(r, \theta, \phi)$$

Los coeficientes se obtienen a partir de

$$c_{m,k} = \frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_{S^2} f(x, y, z) \bar{H}_m^k(x, y, z)$$

Pero observamos que sólo para $k = 0$ H_m^k es independiente de ϕ , de forma tal que todos los coeficientes c_{mk} con $k \neq 0$ son cero y las sumas se reducen

a

$$r^3 \cos^3 \theta = r^2(c_{1,0}H_1^0(r, \theta)) + c_{3,0}H_3^0(r, \theta)$$

de aquí que

$$c_{1,0} = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t^4 dt = 3/5$$

$$\begin{aligned} c_{3,0} &= \frac{7}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^3 \theta ((5 \cos^3 t - 3 \cos t)/2 \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{7}{2} \int_{-1}^1 (5t^6 - 3t^4) dt = \frac{7}{2} \frac{4}{35} = 2/5 \end{aligned}$$

$$z^3 = (3/5)r^2 H_1^0(x, y, z) + (2/5)H_3^0(x, y, z)$$

De manera que la función u dada por

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= (3/5)r^2|_{r=1} H_1^0(x, y, z) + (2/5)H_3^0(x, y, z) \\ &= (3/5)z + (2/5)((-3/2)r^2z + (5/2)z^3) \\ &= (3/5)z - (3/5)(x^2 + y^2 + z^2)z + z^3, \end{aligned}$$

cumple con $\Delta u = 0$ y $u = z^3$ sobre la esfera unitaria.

Ejercicios

1. Calculando las derivadas parciales explícitamente, muestre que, efectivamente, si $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ con $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ entonces $\Delta u = 0$.
2. Muestre que $2 \nabla H_m \cdot \nabla r^{-(2m-1)} + \Delta r^{-(2m-1)} = 0$.
3. Con $u = 1/r$ como en el primer ejercicio, demuestre

$$u(x, y, z - t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}}$$

cuando $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. Calcule H_2 en $(0,4,2)$.
5. En la exposición surgió el campo escalar $w(x, y, z) = z/r$. Verifique

$$\begin{aligned} r^2 |\nabla w|^2 &= 1 - w^2 \\ r^2 \Delta w &= -2w, \end{aligned}$$

o sea las ecuaciones 17.3 y 17.4 del texto.

6. Demuestre que $\int_{-1}^1 P_m^2(z) dz = 2/(2m+1)$. Para ello, considere la función generatriz de los polinomios de Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2tz+t^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)t^m,$$

eleve ambos miembros al cuadrado e integre desde $z = -1$ hasta $z = 1$. El lado izquierdo de la igualdad arroja un logaritmo de alguna función de t . Para el lado derecho, use las relaciones de ortogonalidad entre los polinomios para simplificar la integral de la doble sumatoria.

7. (a) La función $m(x, y, z) = x^3$ es un monomio homogéneo de grado 3. Muestre que m no es un armónico esférico. Modifique la función m sumándole algún otro monomio homogéneo de grado 3 para que la función así obtenida sea un armónico esférico de grado 3.
- (b) Encuentre una base para $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$. Ayuda: comience considerando todos los monomios homogéneos de grado 3 en tres variables.

8. La matriz

$$m = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

define una rotación en torno al eje z . Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que

$$\left. \frac{d}{d\phi} f(m\mathbf{x}) \right|_{\phi=0} = (x\partial_y - y\partial_x)f(\mathbf{x})$$

9. Haciendo los cálculos explícitos muestre que efectivamente, el Laplaciano conmuta con, por ejemplo, el operador L_z

10. Muestre que $L_z H_m = 0$
11. Usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre muestre que con $Q_m = H_m(x, y, z) = r^m P_m(z/r)$ el teorema de ortogonalidad vale : si $m \neq m'$ entonces

$$\int_{S^2} H_m H_{m'} = 0$$